MODULO: Medie

Francesco Bologna   Enrico Rogora

CASIO – Università di Roma

10 - 14 Luglio 2017 - Avellino

Media aritmetica

$$A(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

Senza Calcolatrice

Lanciare 12 volte un dado, raccogliere i risultati, calcolare la media aritmetica.

Con Calcolatrice

Salvare in `List 1` 60 numeri interi casuali prodotti con `Int(1,6,60)`.
Implementare direttamente la definizione di media aritmetica con il comando `Sum List 1/Dim List 1`.
Verificare che coincide con `Mean List 1`

Media geometrica

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{|x_1 \cdot \cdots \cdot x_n|}$$

Senza Calcolatrice

Usare i dati dell'esercizio precedente per calcolare la media geometrica.

Con Calcolatrice

Implementare direttamente la definizione di media aritmetica con il comando `(Prod List 1)^(1/Dim List 1)`.

Media armonica

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

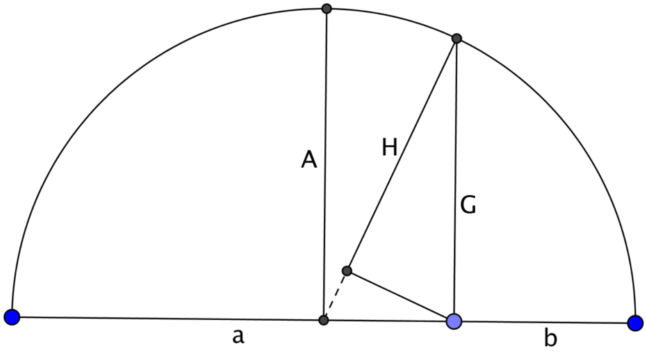
Senza Calcolatrice

Usare i dati dell'esercizio precedente per calcolare la media armonica.

Con Calcolatrice

Implementare direttamente la definizione di media armonica con il comando `(1/(Sum (1/List 1)/Dim(List 1))`.

Le medie pitagoriche



Relazioni

$$H \leq G \leq A$$

Media aritmetica

Una macchina percorre con velocità media v_1 un tratto di strada di lunghezza pari a s_1 in un tempo t. Nello stesso tempo t percorre un successivo tratto di strada di lunghezza pari a s_2 con velocità media v_2. Qual è la velocità media v sull'intero tragitto di lunghezza $s_1 + s_2$, percorso nel tempo 2t? Soluzione: la media aritmetica delle due velocità.

Media armonica

Una macchina percorre con velocità media v_1 un tratto di strada di lunghezza pari a s in un tempo t_1. Percorre un successivo tratto di strada della stessa lunghezza s in un tempo t_2 con velocità media v_2. Qual è la velocità media v nell'intervallo di tempo $t_1 + t_2$, sul tragitto di lunghezza $2s$? Soluzione: la media armonica delle due velocità.

Quando usare la media geometrica

A geometric mean is often used when comparing different items – finding a single "figure of merit" for these items – when each item has multiple properties that have different numeric ranges. For example, the geometric mean can give a meaningful "average" to compare two companies which are each rated at 0 to 5 for their environmental sustainability, and are rated at 0 to 100 for their financial viability. If an arithmetic mean were used instead of a geometric mean, the financial viability is given more weight because its numeric range is larger – so a small percentage change in the financial rating (e.g. going from 80 to 90) makes a much larger difference in the arithmetic mean than a large percentage change in environmental sustainability (e.g. going from 2 to 5). The use of a geometric mean "normalizes" the ranges being averaged, so that no range dominates the weighting, and a given percentage change in any of the properties has the same effect on the geometric mean. So, a 20% change in environmental sustainability from 4 to 4.8 has the same effect on the geometric mean as a 20% change in financial viability from 60 to 72. [Tratto da wikipedia, ma ci sono esempi migliori]

Media aritmetica e media geometrica

La media geometrica e la media aritmetica sono legate attraverso il logaritmo e la funzione esponenziale.

$$G(x_1, \ldots, x_n) = e^{A(\log_e(x_1), \ldots, \log_e(x_n))}$$

Medie b tra due grandezze $a < c$ definite tramite proporzioni

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a} & (6) & \frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b} \\
(2) & \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b} & (7) & \frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a} \\
(3) & \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c} & (8) & \frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a} \\
(4) & \frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a} & (9) & \frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a} \\
(5) & \frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a} & (10) & \frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}
\end{array}
$$

(1) media aritmetica; (2) media geometrica; (3) media armonica; (4) media controarmonica;

Media aritmetico armonica

Dati due numeri a_0, b_0 possiamo considerare la loro media aritmetica $a_1 = A(a_0, b_0)$ e la loro media armonica $b_1 = H(a_0, b_0)$. Iteriamo la costruzione, considerando le due successioni $a_i = A(a_{i-1}, b_{i-1})$, $b_i = H(a_{i-1}, b_{i-1})$.
Si può dimostrare che:

1. le due successioni convergono allo stesso limite, che si dice la media aritmetico armonica dei due numeri;
2. la media aritmetico armonica coincide con la media geometrica.

Su queste proprietà si basa l'algoritmo babilonese per il calcolo della radice quadrata di un numero.

Media aritmetico geometrica

Dati due numeri a_0, b_0 possiamo considerare la loro media aritmetica $a_1 = A(a_0, b_0)$ e la loro media geometrica $b_1 = G(a_0, b_0)$. Iteriamo la costruzione, considerando le due successioni. $a_i = A(a_{i-1}, b_{i-1})$, $b_i = G(a_{i-1}, b_{i-1})$.
Si può dimostrare che:

1. le due successioni convergono allo stesso limite, che si dice la media aritmetico geometrica (agm) dei due numeri;
2. $agm(x, y) = \frac{\pi}{4} \frac{x+y}{K\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}$, dove $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$ è l'*integrale ellittico completo del primo tipo*.

Su queste proprietà si basano diversi algoritmi efficienti per il calcolo di π, delle funzioni trascendenti elementari e per la valutazione numerica degli integrali ellittici.

Media aritmetico geometrica e calcolo di π I

```
[1] [STO] [ALPHA] [tan] [EXE]
[0] [STO] [ALPHA] [)] [EXE]
[1] [STO] [ALPHA] [X,Theta,T] [EXE]
[1] [/] [SHIFT] [x^2] [2] [Right] [STO] [ALPHA] [log] [EXE]

*****

[ALPHA] [)] [+] [1] [STO] [ALPHA] [)] [EXE]
[(] [ALPHA] [X,Theta,T] [+] [ALPHA] [log] [)] [/] [2]
        [STO] [ALPHA] [sin] [EXE]
[SHIFT] [x^2] [ALPHA] [X,Theta,T] [*] [ALPHA] [log] [Right] [STO]
        [ALPHA] [cos] [EXE]
[(] [ALPHA] [X,Theta,T] [-] [ALPHA] [log] [)] [/] [2] [STO]
        [ALPHA] [ln] [EXE]
[ALPHA] [sin] [STO] [ALPHA] [X,Theta,T] [EXE]
[ALPHA] [cos] [STO] [ALPHA] [log] [EXE]
```

Media aritmetico geometrica e calcolo di π II

```
[ALPHA][tan][-][2][^][ALPHA][)][+][1][Right][*][ALPHA]
        [ln][^][2][Right][STO][ALPHA][tan][EXE]
[4][ALPHA][log][^][2][Right][/][ALPHA][tan][EXE]
[4][ALPHA][X,Theta,T][^][2][Right][/][ALPHA][tan][EXE]

++++ Ripeti da *****
```

Media armonico geometrica

Dati due numeri a_0, b_0 possiamo considerare la loro media armonica $a_1 = H(a_0, b_0)$ e la loro media geometrica $b_1 = G(a_0, b_0)$. Iteriamo la costruzione, considerando le due successioni. $a_i = H(a_{i-1}, b_{i-1})$, $b_i = G(a_{i-1}, b_{i-1})$. Si può dimostrare che le due successioni convergono allo stesso limite, che si dice la media armonico – geometrica (hgm) dei due numeri.

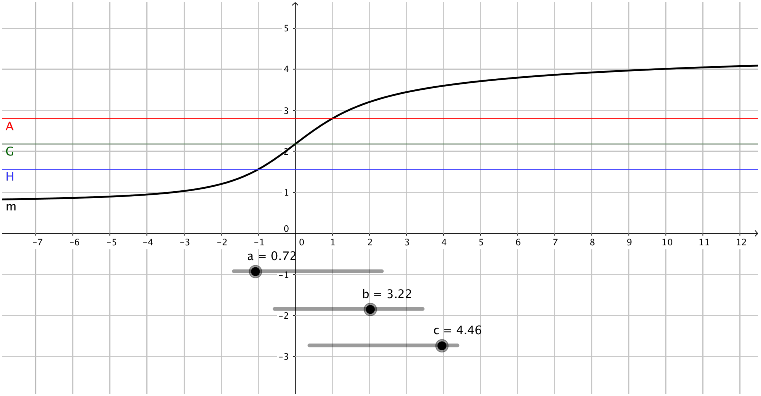
$$\begin{aligned} \min(x, y) \leq H(x, y) \leq hgm(x, y) \leq G(x, y) = ham(x, ya) \\ \leq agm(x, y) \leq A(x, y) \leq \max(x, y) \end{aligned}$$

Medie di potenza (di Hölder o di Minkovski)

$$M_p(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$p \to -\infty$, min; $p = -1$: media armonica, $p \to 0$: media geometrica, $p = 1$: media aritmetica, $p \to +\infty$, max.

Medie di potenza di a, b, c

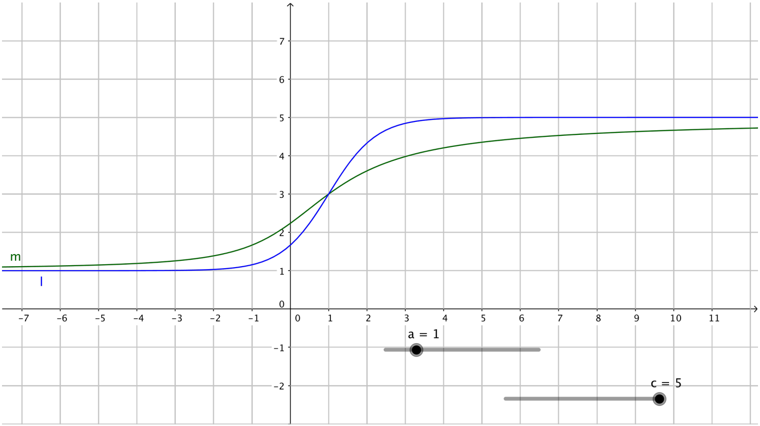


Medie di Lehmer

$$L_p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-1}}$$

La media controarmonica è media di Lhemer per $p = 2$.

Confronto Lehmer-Potenza di due numeri a e c



Proprietà delle medie potenza e delle medie di Lehmer

- $C(x_1, \ldots, x_n) \in [\min(x_1, \ldots, x_n), \max(x_1, \ldots, x_n)]$
- $C(t \cdot x_1, \ldots, t \cdot x_n) = t \cdot C(x_1, \ldots, x_n)$ $(t > 0)$.

Corollario della prima: $C(x, \ldots, x) = x$.

Medie di Kolmogorov

Sia f una funzione continua e iniettiva da un intervallo I della retta reale in $\mathbb{R}$. Definiamo, con Kolmogorv, f-media di $x_1, \ldots, x_n \in I$

$$M_f(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\right).$$

f	media	f	media
x	aritmetica	1/x	armonica
$\log x$	geometrica	x^p	di potenza

Proprietà delle medie di Kolmogorv

- Se $\overline{x} = M_f(x_1, \dots, x_b)$, $M(\overline{x}, \dots, \overline{x}) = M_f(x_1, \dots, x_b)$
- Una f-media è omogenea se e solo se è una media di potenza o la media geometrica.

Medie secondo Chisini

Scopo di una media è spesso quello di semplificare un problema sostituendo a tante osservazioni numeriche un singolo numero. Quando è possibile descrivere un problema con una funzione f (detta *richiesta di invarianza*), la corrispondente media $\overline{x}$ è definita ponendo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\overline{x}, \ldots, \overline{x}).$$

La media di Chisini può essere esterna all'intervallo $[\min, \max]$.

Applicazione delle medie di Chisini

Semplici casi geometrici: determinare il quadrato *equivalente* a un rettangolo, dove per equivalente si intende:

- stesso perimetro (media aritmetica dei lati);
- stessa area (media geometrica dei lati);
- stessa diagonale (media quadratica dei lati).

Altre applicazioni: velocità per mantenere il tempo di viaggio costante e il consumo di carburante.

Distanza minima da un insieme di numeri

- $d_1(x; x_1, \ldots, x_n) = (x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$. Il minimo è la media aritmetica.
- $d_2(x; x_1, \ldots, x_n) = |x - x_1| + \cdots + |x - x_n|$. Il minimo è la mediana.

Medie ponderate

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \qquad H = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}$$

$$G = \left(\prod_{i=1}^n x_i^{w_i}\right)^{1/\sum_{i=1}^n w_i} \qquad M_f = f^{-1}\left(\frac{w_1 f(x_1)+\cdots+w_n f(x_n)}{w_1+\cdots+w_n}\right)$$

$$M_{p,w}(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^p}{\sum_{i=1}^n w_i}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad L_{p,w}(x) = \frac{\sum_{k=1}^n w_i x_k^p}{\sum_{k=1}^n w_i x_k^{p-1}}$$