

# Convegno UMI-CIIM di Pavia: Laboratorio CASIO (II)

*Enrico Rogora*

In questo laboratorio si considerano le funzionalità statistiche e le simulazione di alcuni semplici modelli probabilistici. Si parte con la simulazione del lancio della moneta e del dado, per passare a quella del conteggio del numero delle teste nel lancio ripetuto di una moneta e si considerano le relative distribuzioni empiriche e teoriche delle frequenze, che verranno visualizzate ed esplorate attraverso la grafica della calcolatrice. Si terinerà con l'illustrazione grafica del teorema di Laplace, della convergenza in misura della distribuzione binomiale alla distribuzione normale.

## Simulazioni

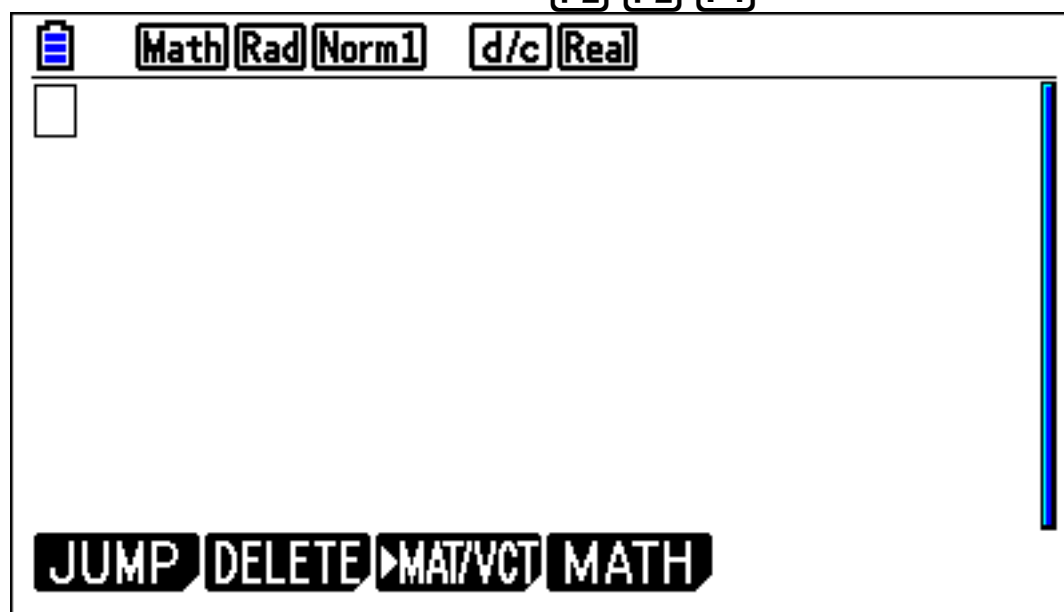
### Lancio della moneta

Con la calcolatrice abbiamo a disposizione un generatore di numeri (pseudo)-casuali, attraverso cui è possibile simulare semplici processi stocastici. Il più semplice è quello relativo al lancio ripetuto di una moneta (processo aleatorio discreto di Bernoulli). Per accedere al generatore di numeri (pseudo)-casuali e ai suoi derivati, entriamo nel Menu Principale e selezioniamo l'opzione run-Matrix, premendo la successione di tasti

**MENU** **1**

Ripuliamo lo schermo con la successione

**F2** **F2** **F1**



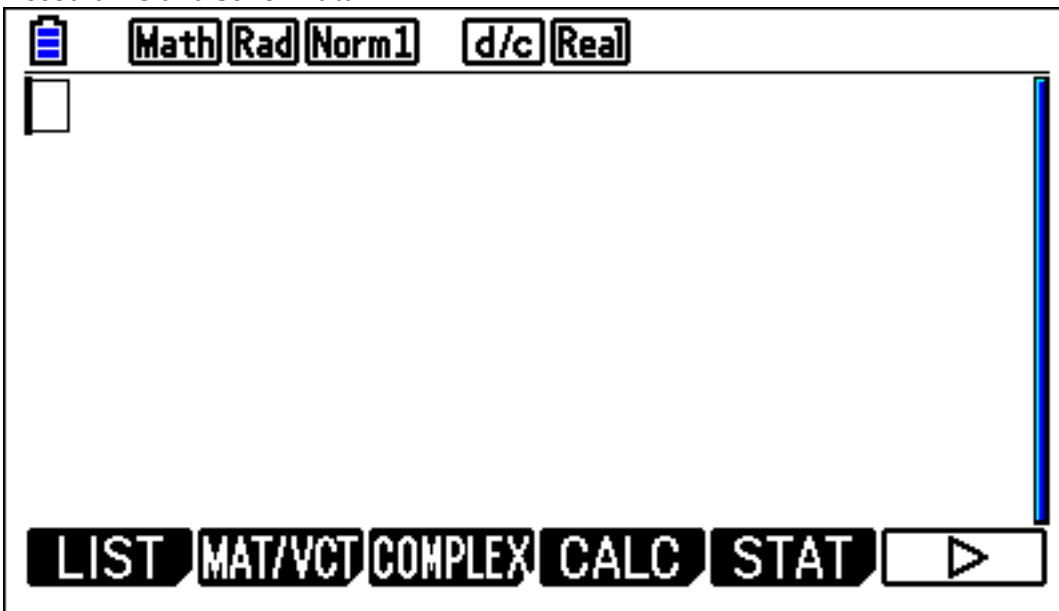
Possiamo selezionare le funzioni che appaiono nell'ultima riga dello schermo premendo il tasto della calcolatrice posto immediatamente sotto. Per esempio per accedere alle funzioni DELETE premo il tasto

**F2**

Per aggiungere funzioni, tra cui quelle relative alle simulazioni probabilistiche, dobbiamo premere il tasto

**OPTN**

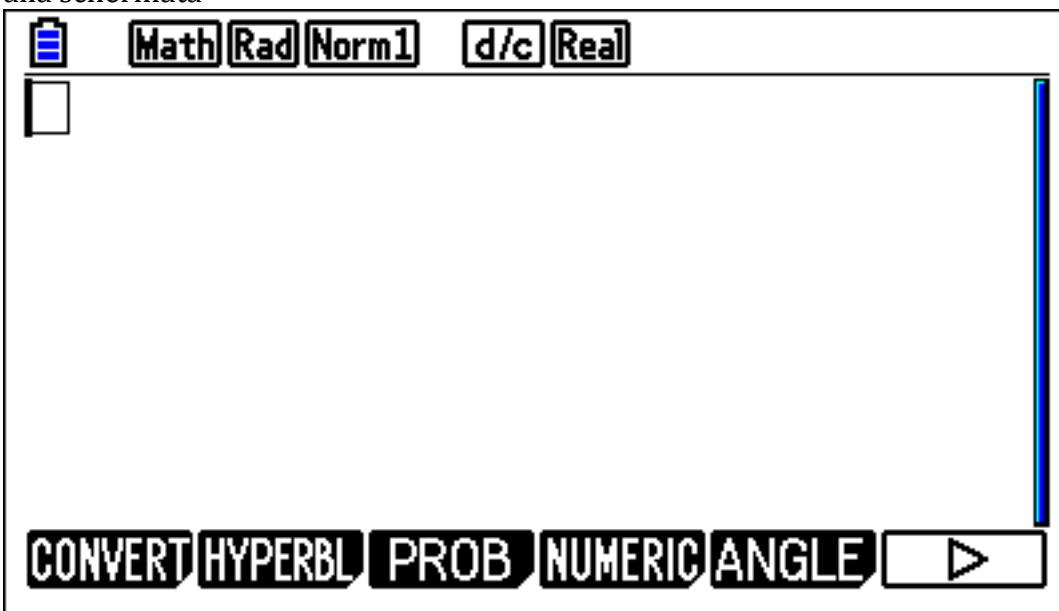
Accediamo alla schermata



e, premendo il tasto

**F6**

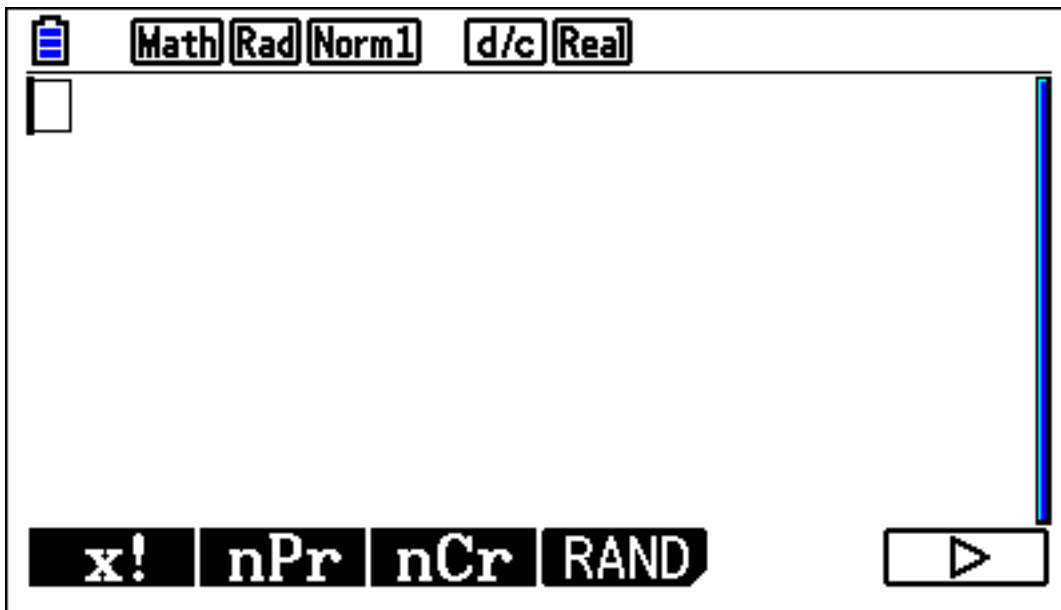
alla schermata



dove appare finalmente il menu **PROB** che possiamo selezionare con il tasto

**F3**

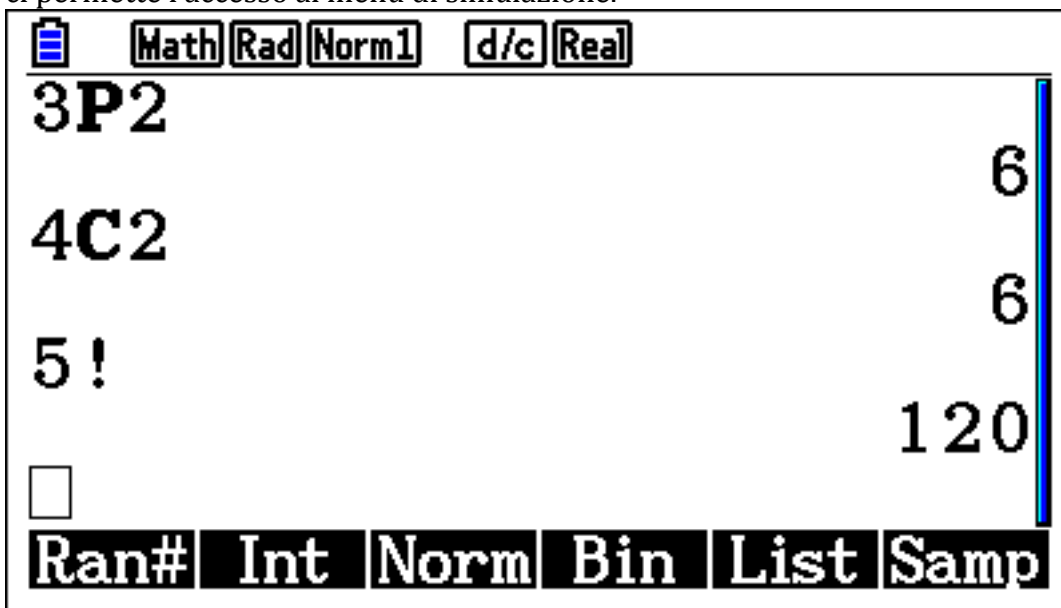
che ci porta alla schermata



La prime tre funzioni (permutazioni, disposizioni e combinazioni) sono relative al calcolo combinatorio. L'ultima, RAND, che selezioniamo con il tasto

**F4**

ci permette l'accesso al menu di simulazione.



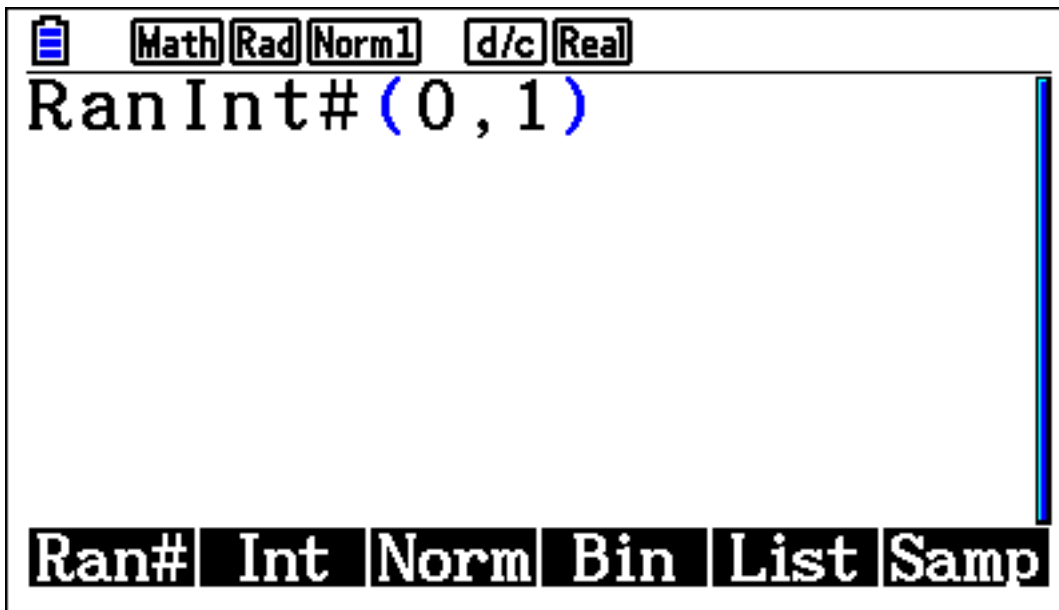
Da questa schermata possiamo accedere all'estrazione casuale da diverse distribuzioni. La scelta della funzione **Int** ci permette l'estrazione casuale dalla distribuzione casuale degli interi in un certo intervallo. Selezioniamo questa funzione con il tasto

**F2**

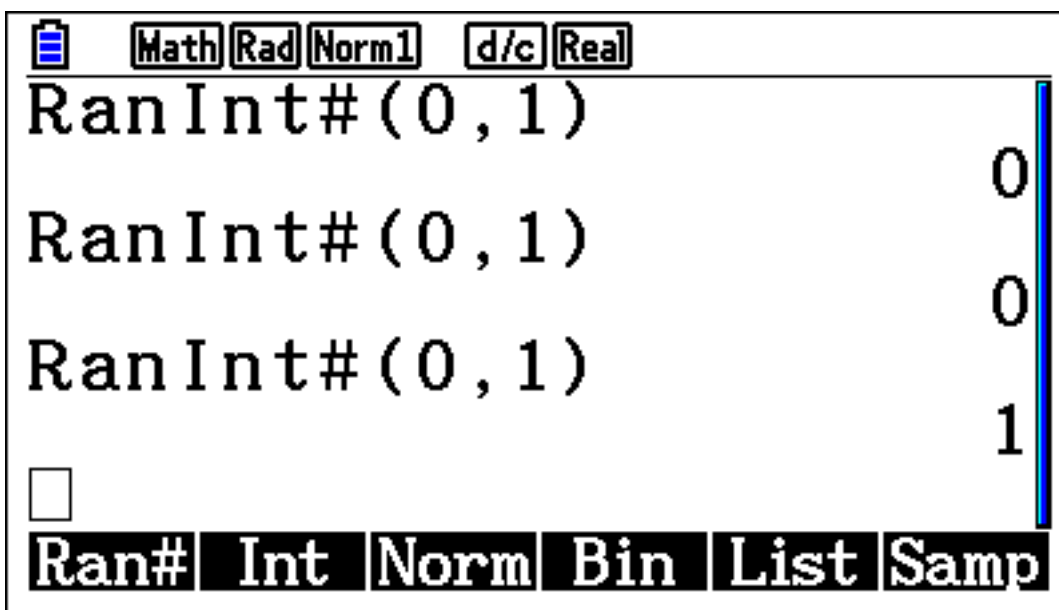
e selezioniamo l'intervallo  $[0,1]$  premendo i tasti

**0** **,** **1** **)**

che ci portano alla schermata



Questo comando, come detto, estrae un intero nell'intervallo  $[0,1]$ , cioè 0 oppure 1, con probabilità uniforme. Il risultato sarà 0 o 1 con ugual probabilità, pari quindi a  $\frac{1}{2}$ . Il processo equivale a lanciare una moneta. Avremo Testa (1) con probabilità  $\frac{1}{2}$ , e Croce (0) con probabilità  $\frac{1}{2}$ . Non possiamo presire con certezza il risultato a priori ma soltanto che ogni esecuzione ci darà 0 o 1 e ripetendo l'esecuzione del comando più volte, la proporzione delle volte che esce 1 tende ad uguagliare la proporzione delle volte che esce 0. La figura illustra il risultato ottenuto eseguendo tre volte il comando, cioè premendo tre volte il tasto



Naturalmente il risultato dell'esecuzione di questi comandi non è noto a priori e in generale differisce di volta in volta (la probabilità di ottenere lo stesso qui riportato è pari a  $\frac{1}{8}$ ).

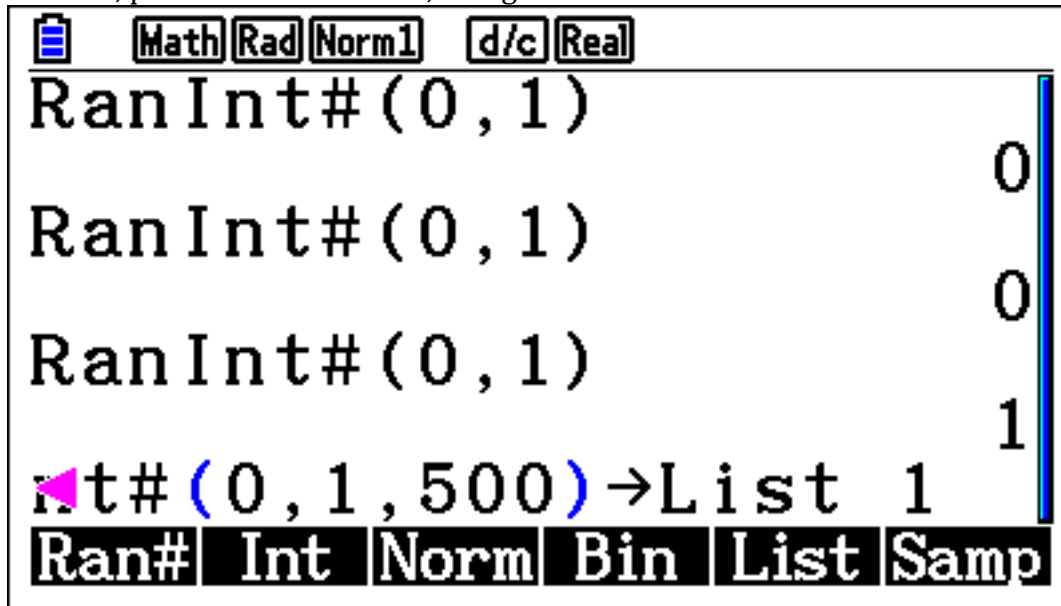
### Simulazione del lancio ripetuto di una moneta

Vogliamo verificare l'affermazione che la frequenza di uscita dei due possibili risultati tende ad uguagliarsi ripetendo l'esperimento molte volte.

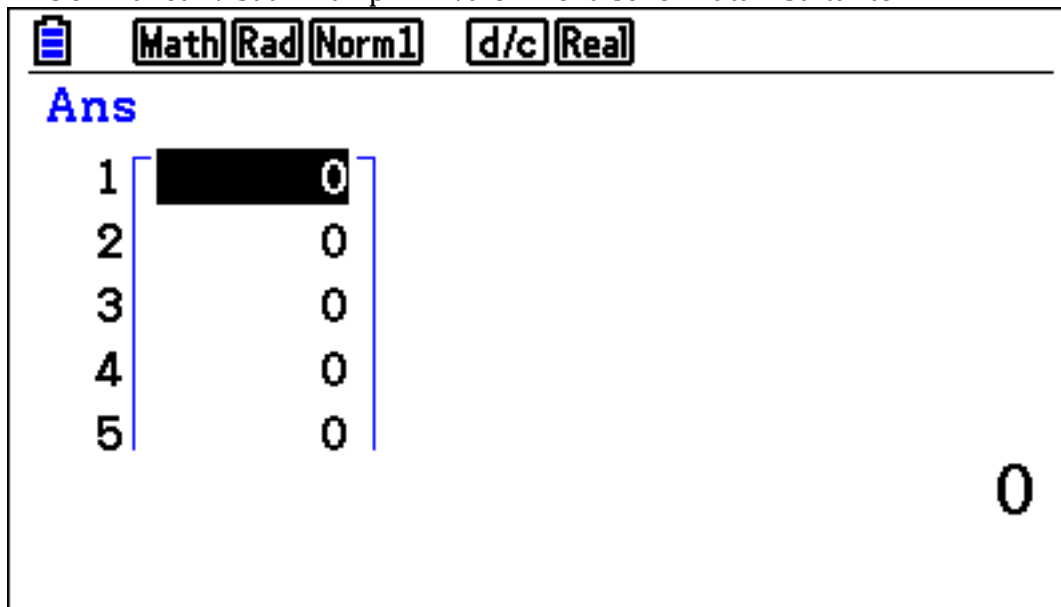
Per ripetere più volte l'esperimento, selezioniamo la funzione  $\text{RanInt}\#$  dalla schermata delle simulazioni e chiediamo alla calcolatrice di ripetere la simulazione del lancio della moneta 500 volte e di salvare il risultato nella lista  $\text{List } 1$ , premendo la successione di comandi

$\boxed{\text{F2}} \boxed{0} \boxed{,} \boxed{1} \boxed{,} \boxed{5} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{1} \boxed{1}$

Avremo, prima dell'esecuzione, la seguente schermata



Eseguendo l'istruzione la calcolatrice salva una lista di zero e uno nella variabile di tipo lista  $\text{List } 1$  di cui visualizza i primi valori nella schermata risultante



e che, ancora una volta, dipende dall'esecuzione (per inciso, la probabilità di avere i primi cinque valori uguali a zero, come nella esecuzione fatta nel preparare queste note, è pari a  $1/32$ ).

**Esercizio** calcolare la probabilità che in una classe di  $n$  studenti, due studenti almeno due studenti abbiano i primi cinque risultati uguali nella formazione della lista che abbiamo indicato.

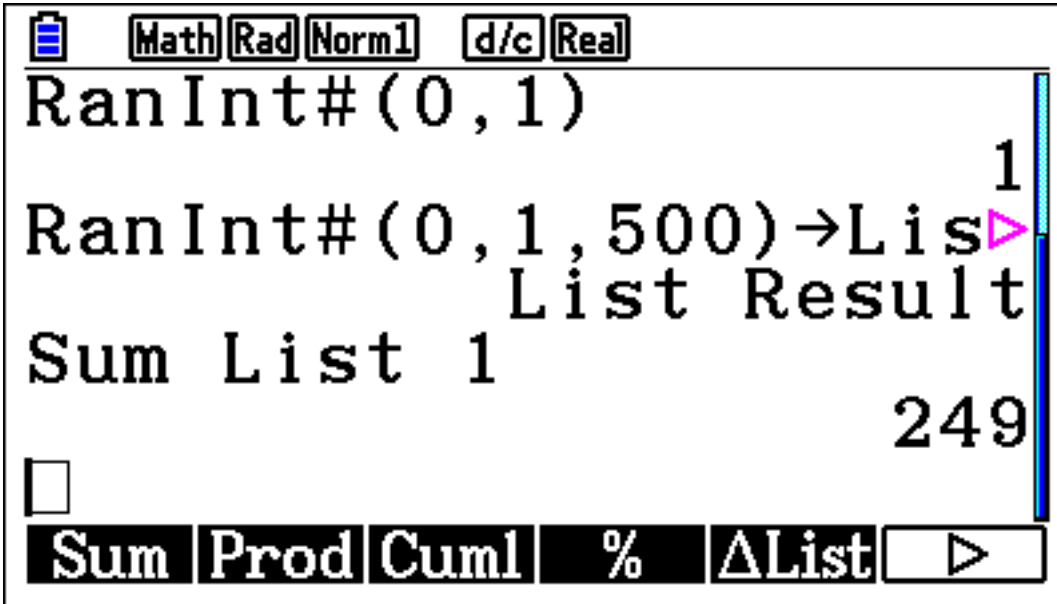
### Conteggio delle teste uscite nel lancio ripetuto di una moneta

Il conteggio delle teste uscite nell'esperimento precedente e memorizzate nella lista  $\text{List } 1$  è, in linea di principio, molto semplice. Basta sommare gli elementi della lista  $\text{List } 1$ .

Praticamente, bisogna richiamare le funzioni accessibili con il tasto **OPTION**, selezionare le funzioni del gruppo **List** e tra queste scegliere **Sum** e applicarla a **List 1**. Questo si ottiene premendo la sequenza di tasti

**OPTN** **F1** **F6** **F6** **F1** **SHIFT** **1** **1** **EXE**

Nella nostra simulazione abbiamo ottenuto



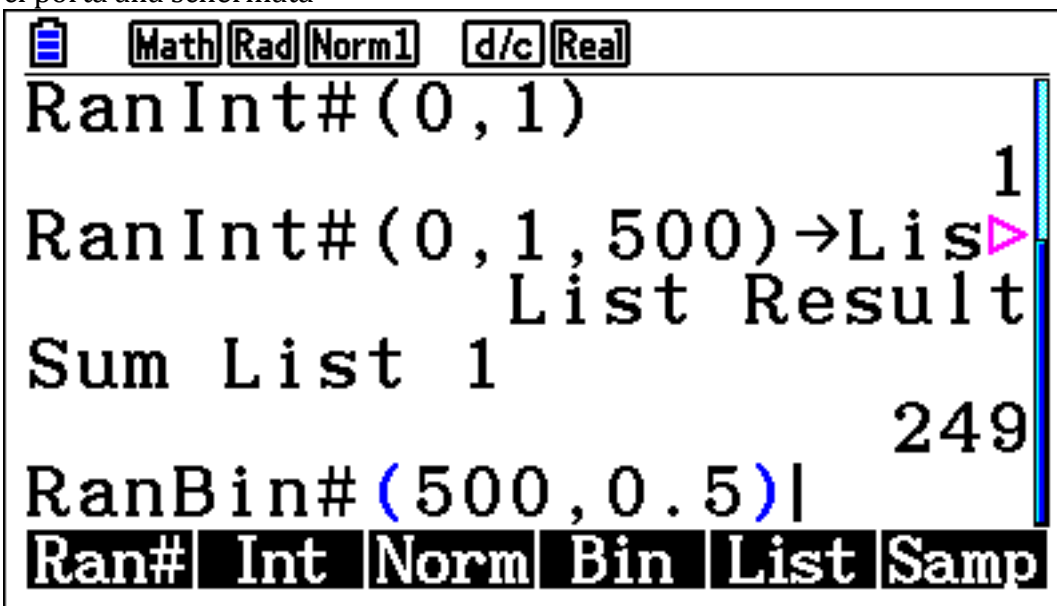
In generale il risultato può discostarsi significativamente dall'aspettazione, cioè da 250. È istruttivo, in una classe numerosa, vedere come si distribuiscono questi valori, e calcolarne la media.

### Simulazione del conteggio delle teste nella lancio ripetuto 500 volte di una moneta

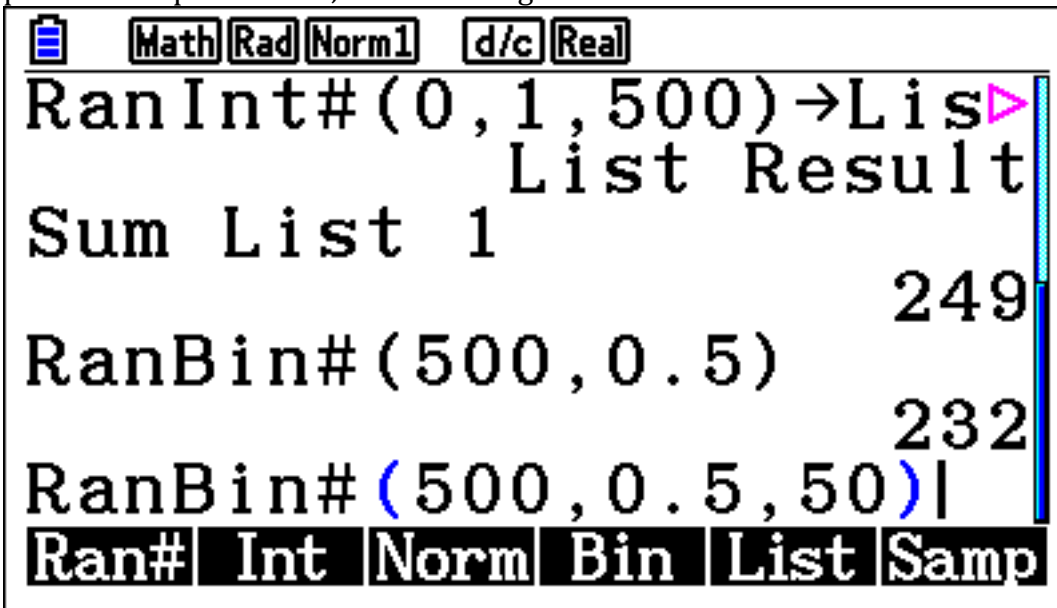
Il calcolo precedente conta il numero delle teste nella ripetizione di 500 lanci. La calcolatrice permette di simulare direttamente l'esito di tale calcolo, senza dover simulare il lancio della moneta 500 volte. Basta usare la funzione **RanBin#(** che si ottiene selezionando **Bin** dal menu di simulazione. La successione dei tasti

**OPTN** **F6** **F3** **F4** **F4** **5** **0** **0** **,** **0** **.** **5** **)**

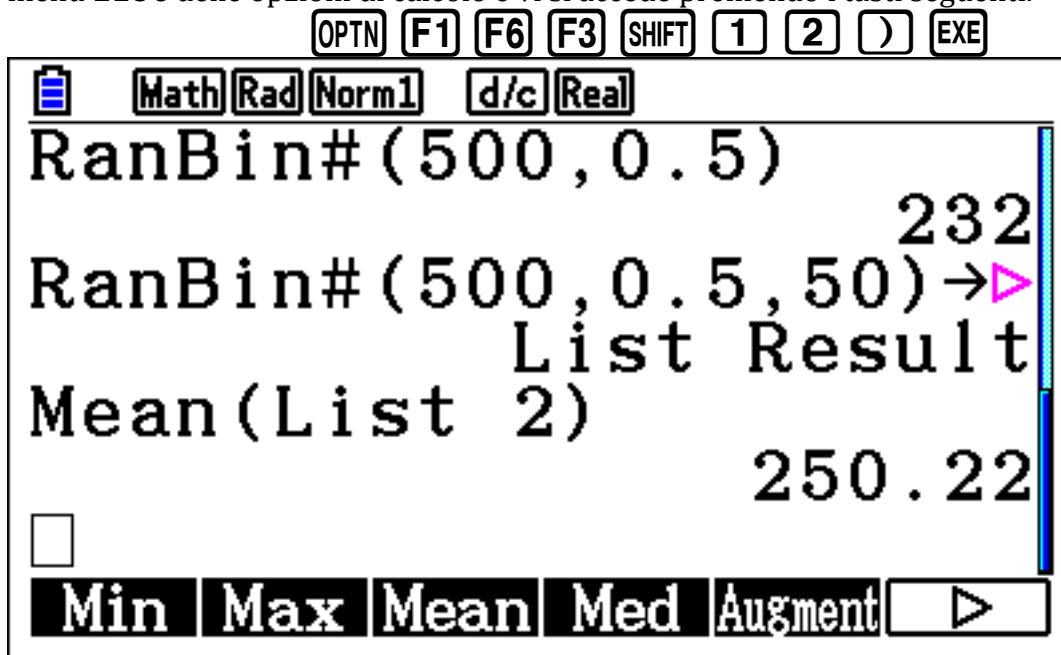
ci porta alla schermata



la cui esecuzione ci da il numero delle teste nella simulazione del conteggio delle teste in 500 lanci. Per ripetere 50 volte tale simulazione, basta fornire alla funzione  $\text{RandBin}\#$ ( il parametro opzionale 50, come nella figura



Conviene anche qui salvare il risultato in una lista, suggeriamo  $\text{List 2}$  e pazientare un po' durante l'esecuzione. Il calcolo della media della lista  $\text{List 2}$  fornisce usualmente un valore più vicino al valore teorico aspettato. La funzione  $\text{MEAN}$  per calcolare la media si trova nel menù  $\text{List}$  delle opzioni di calcolo e vi si accede premendo i tasti seguenti.




### Istogramma del conteggio delle teste

Diamo uno sguardo sintetico a  $\text{List 2}$ . Oltre alla media, che abbiamo già calcolato, calcoliamo il valore minimo e il valore massimo e gli altri indici statistici fondamentali. Per far ciò ad un colpo, conviene entrare nell'ambiente statistico premendo i tasti

**MENU** **2** **EXP**

che aprono la schermata seguente

 <span style="margin-left: 20px;">Rad</span> <span style="margin-left: 20px;">Norm1</span> <span style="margin-left: 20px;">d/c</span> <span style="margin-left: 20px;">Real</span>				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	239		
2	0	243		
3	0	273		
4	0	266		

GRAPH
CALC
TEST
INTR
DIST
▶

Di qui selezioniamo **CALC** e poi **SET** per entrare nella schermata di selezione delle liste e delle operazioni statistiche da applicare

 <span style="margin-left: 20px;">Rad</span> <span style="margin-left: 20px;">Norm1</span> <span style="margin-left: 20px;">d/c</span> <span style="margin-left: 20px;">Real</span>		
<b>1Var</b>	<b>XList</b>	<b>: List1</b>
1Var	Freq	: 1
2Var	XList	: List1
2Var	YList	: List2
2Var	Freq	: 1

**LIST**

Per inserire **List 2** nella prima riga, quella che specifica la variabile lista per cui calcolare gli indici fondamentali, dobbiamo selezionare l'operazione **LIST** premendo il corrispondente tasto funzione, e inserire il numero 2 quando richiesto. Si torna quindi al menu precedente premendo il tasto

**EXIT**

Dal menù di calcolo della schermata



<span>☰</span> <span>Rad</span> <span>Norm1</span> <span>d/c</span> <span>Real</span>				
	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	0	239		
2	0	243		
3	0	273		
4	0	266		

1-VAR 2-VAR **REG** SET

selezioniamo con l'opportuno tasto funzione l'operazione 1-VAR che in due schermate successive ci fornisce il valore dei seguenti indici statistici

<span>☰</span> <span>Rad</span> <span>Norm1</span> <span>d/c</span> <span>Real</span>	
<b>1-Variable</b>	
$\bar{X}$	=250.22
$\Sigma X$	=12511
$\Sigma X^2$	=3.1393E+06
$\sigma X$	=13.2684437
SX	=13.4031522
n	=50

↓

<span>☰</span> <span>Rad</span> <span>Norm1</span> <span>d/c</span> <span>Real</span>	
<b>1-Variable</b>	
minX	=228
Q1	=240
Med	=248.5
Q3	=257
maxX	=293
Mod	=240

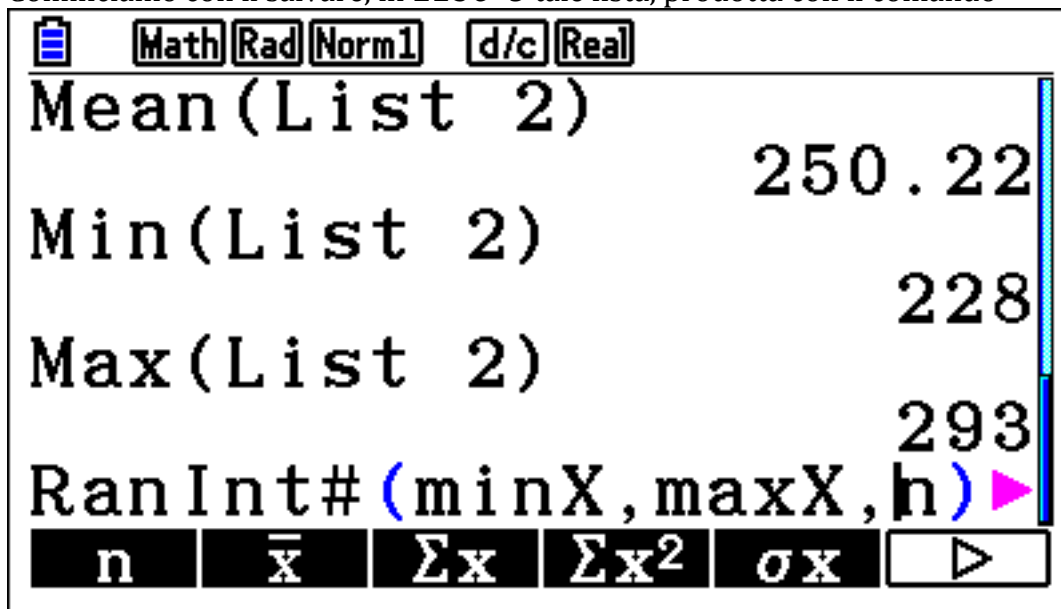
↑

↓

Lista 2 contiene, nel nostro esempio, ma i valori cambiano ad ogni esecuzione, n=50 interi compresi tra minX=228 e maxX=293.

Per visualizzare graficamente la distribuzione dei valori contenuti in Lista 2 possiamo chiedere alla calcolatrice di realizzare un istogramma che vogliamo confrontare con quello di una lista con lo stesso numero di interi scelti con distribuzione uniforme dall'intervallo [minX, maxX].

Cominciamo con il salvare, in List 3 tale lista, prodotta con il comando



prodotto premendo la sequenza di tasti



che salva il risultato in List 3.

Per disegnare l'istogramma di una lista di valori numerici, bisogna selezionare lo schermo GRAPHIC dallo schermo principale dell'ambiente statistico, cui si accede con la sequenza di comandi

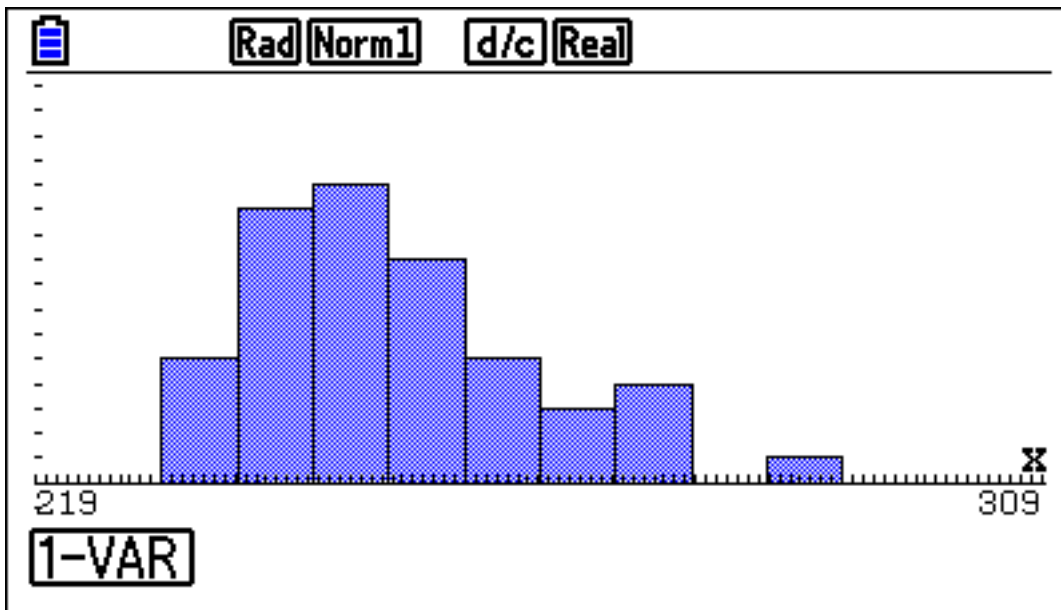


Lo schermo ha l'aspetto riportato in figura.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB 1	0	239	243	
2	0	243	236	
3	0	273	288	
4	0	266	231	

0

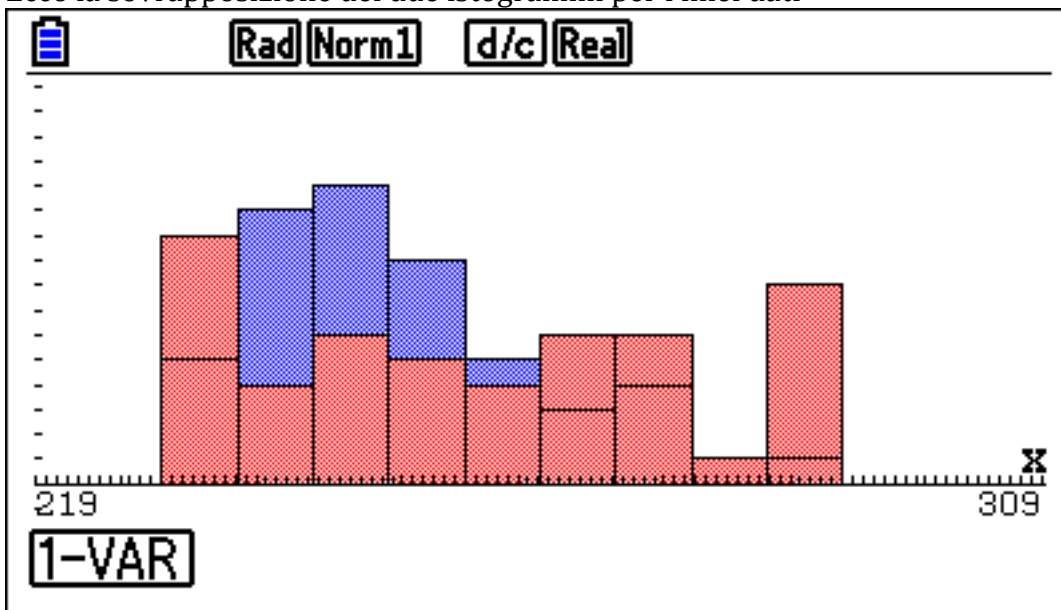




**Esercizio** Verificare come cambia il grafico cambiando le opzioni al momento della rappresentazione.

**Esercizio** Rappresentare l'istogramma dei dati contenuti nella LIST3 e esprimere a parole la differenza qualitativa tra i due istogrammi.

Ecco la sovrapposizione dei due istogrammi per i miei dati



### Distribuzioni binomiali

La distribuzione teorica dei dati relativi al conteggio del numero delle teste nella ripetizione  $N$  volte del lancio di una moneta in cui la probabilità di osservare testa è pari a  $P$  è descritta dalla *distribuzione binomiale*. Per essere più precisi inizialiamo i valori dei parametri della distribuzione a  $N=10$  e  $P=1/2$ . Ciò è possibile nell'ambiente di calcolo numerico. Per accedervi e operare i calcoli si preme la successione di tasti

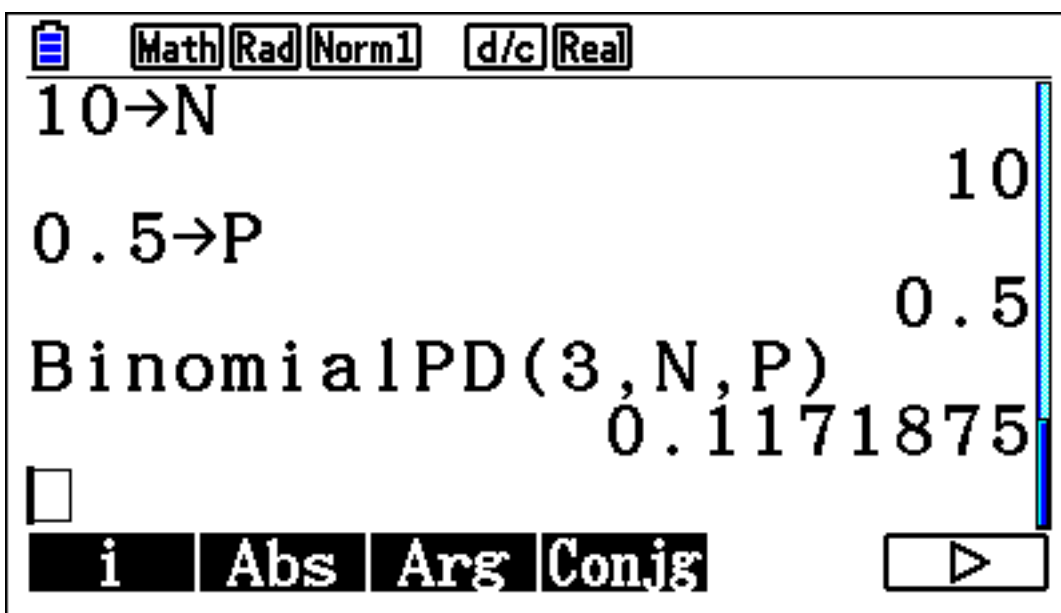
**MENU** **1** **1** **0** **→** **ALPHA** **8** **EXE** **0** **.** **5** **→** **ALPHA** **4** **EXE**



Il calcolo della probabilità che la distribuzione binomiale assegna alla possibilità di osservare K teste lanciando N volte una moneta con probabilità P di osservare testa si può fare con la funzione BinomialPD che si trova nel CATALOG. La successione di tasti per calcolare BinomialPD(3, N, P) è

SHIFT 4 log ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ EXE 3 , ALPHA 8 , ALPHA  
 4 ) EXE

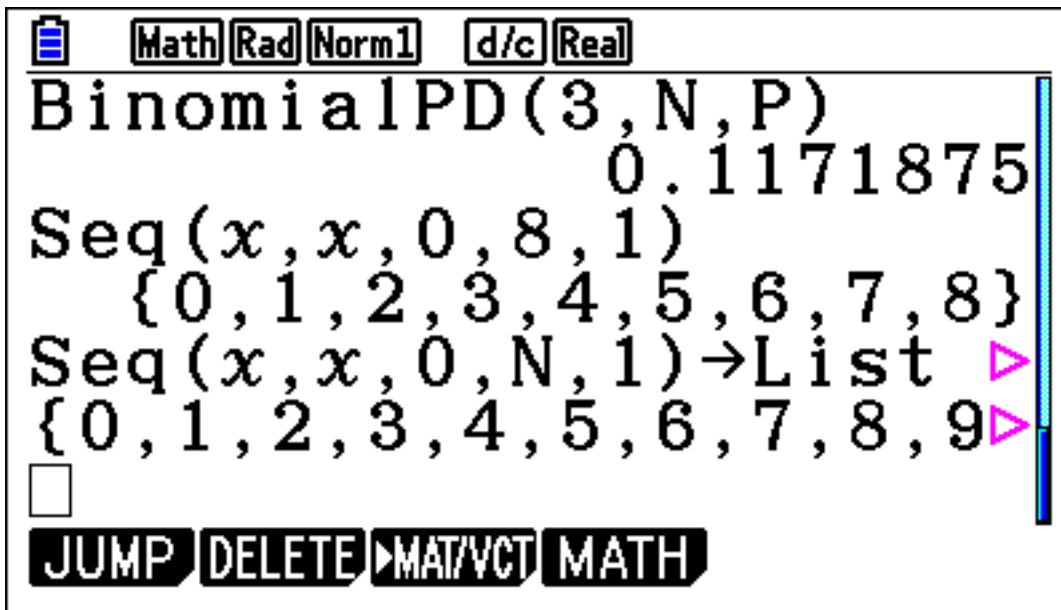
che restituisce



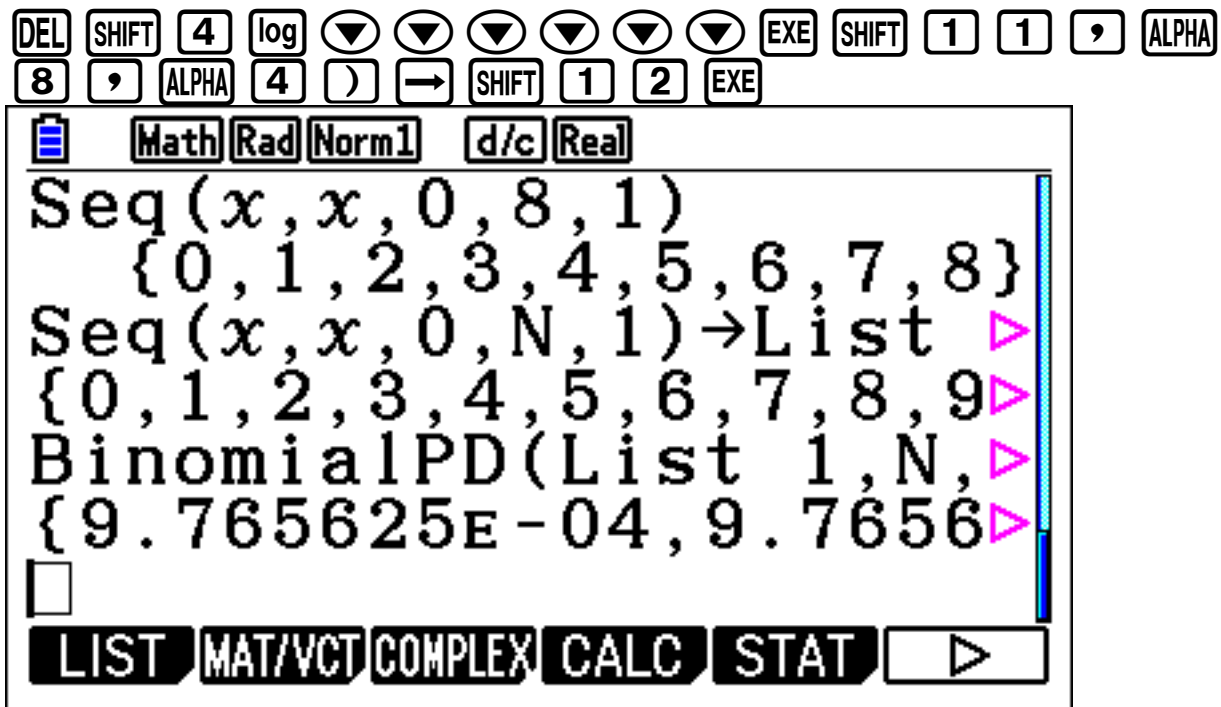
È possibile inserire, al posto del valore K una intera lista di valori per cui calcolare la distribuzione binomiale, in particolare l'intera lista, con la funzione Seq(x, x, θ, N, 1), cui si accede premendo la seguente successione di tasti

OPTN F1 F5 X,θ,T , X,θ,T , 0 , ALPHA 8 , 1 )

Salviamo questa successione in List 1.



e valutiamo la distribuzione binomiale sugli elementi di List 1, salvando il risultato in List 2.

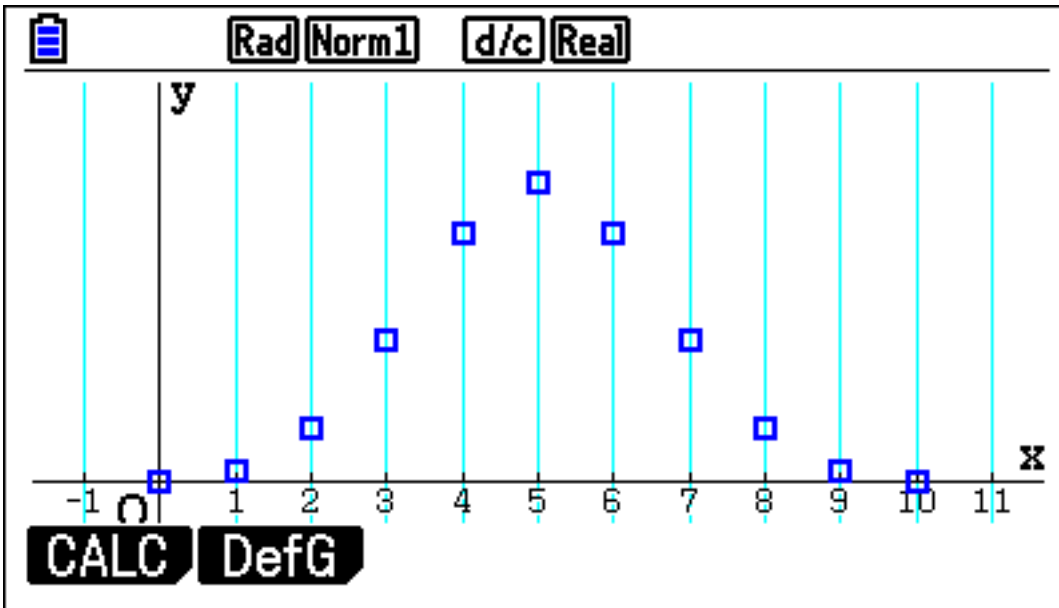


### Istogrammi delle distribuzioni binomiali

Con la sequenza



otteniamo lo scatter plot della distribuzione binomiale

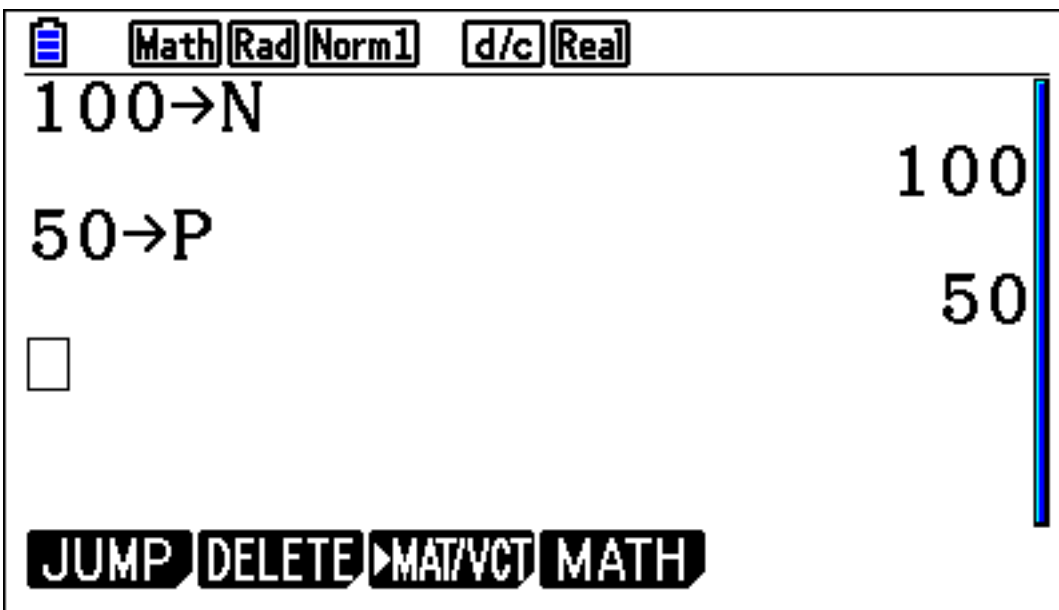


È chiaro che questi punti sembrano disporsi su una bump function del tipo di quella descritta nel primo laboratorio. Per verificare che le cose vanno davvero così è necessaria qualche modifica.

### Teorema di de-Moivre Laplace

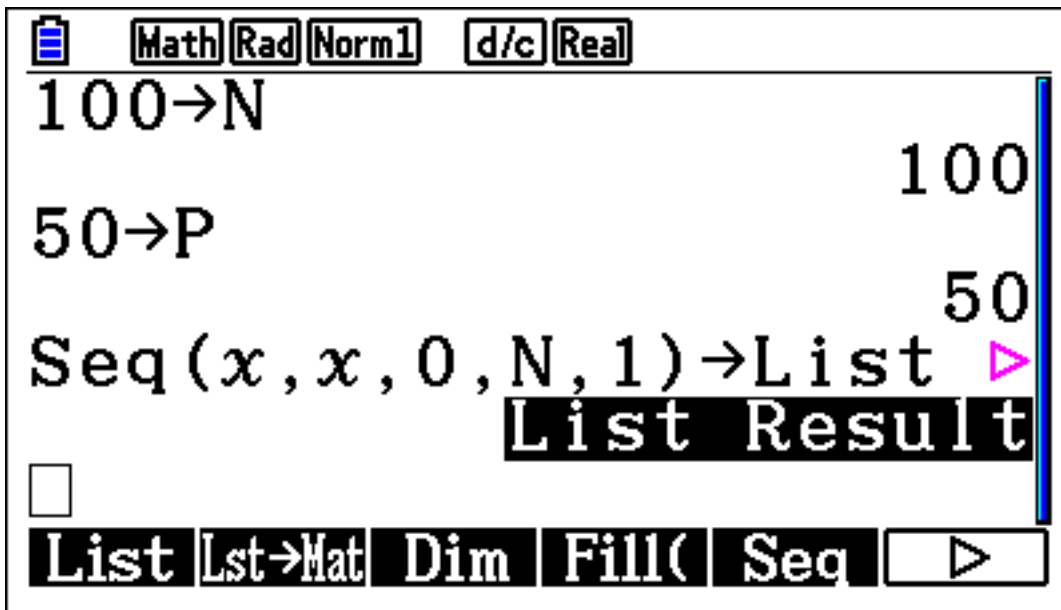
Dalla finestra Run-Matrix

Inizializziamo le variabili numeriche N e P a 100 e 0.5 rispettivamente



Produciamo la lista degli interi da 0 a N e salviamola nella lista List 1.

OPTN F1 F5 X,θ,T , X,θ,T , 0 , ALPHA 8 , 1 ) → SHIFT  
 1 1 EXE  
 EXIT



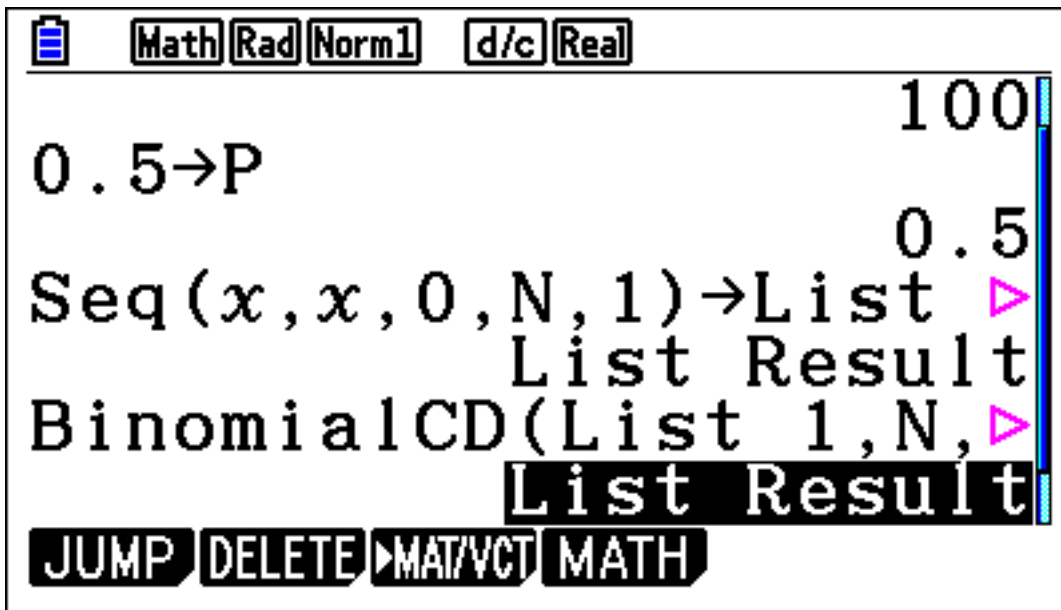
Calcoliamo i valori della distribuzione cumulativa binomiale sugli elementi della Lista 1 e salviamoli nella Lista 2.

SHIFT 4 log ▼ ▼ ▼ ▼ ▼

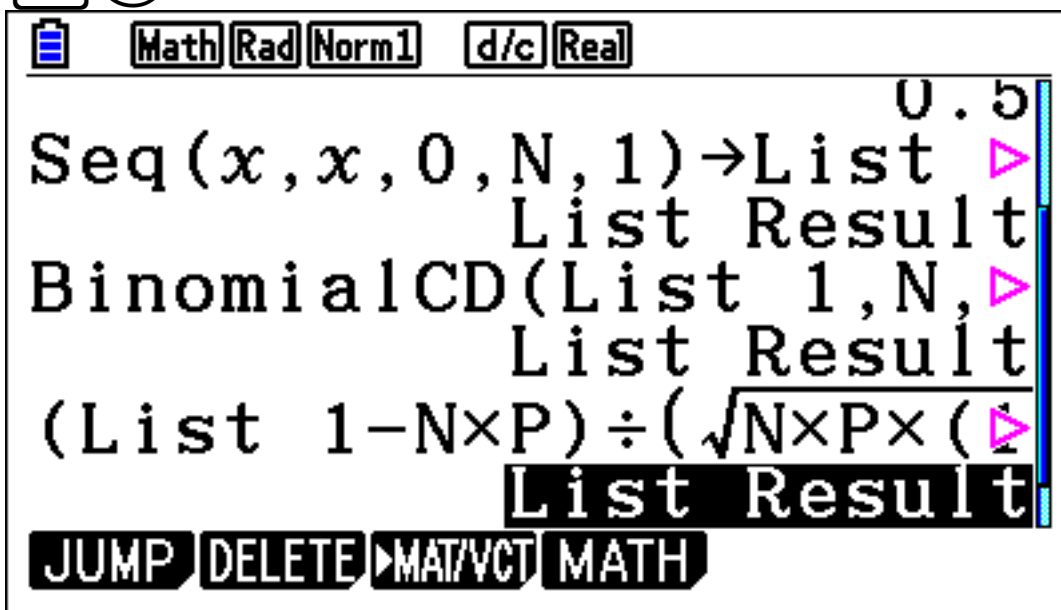
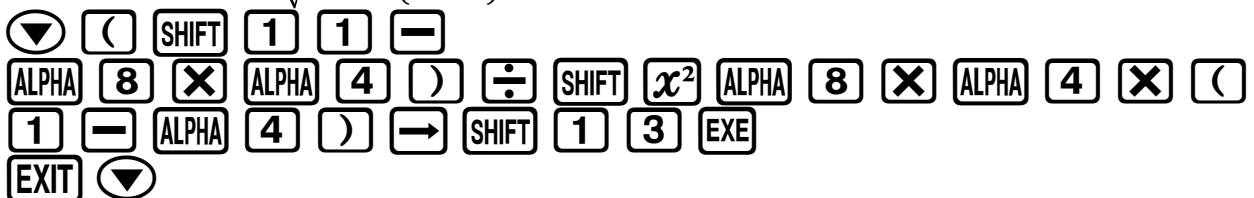


EXE SHIFT 1 1 , ALPHA 8 , ALPHA 4 ) → SHIFT 1 2 EXE  
 EXIT



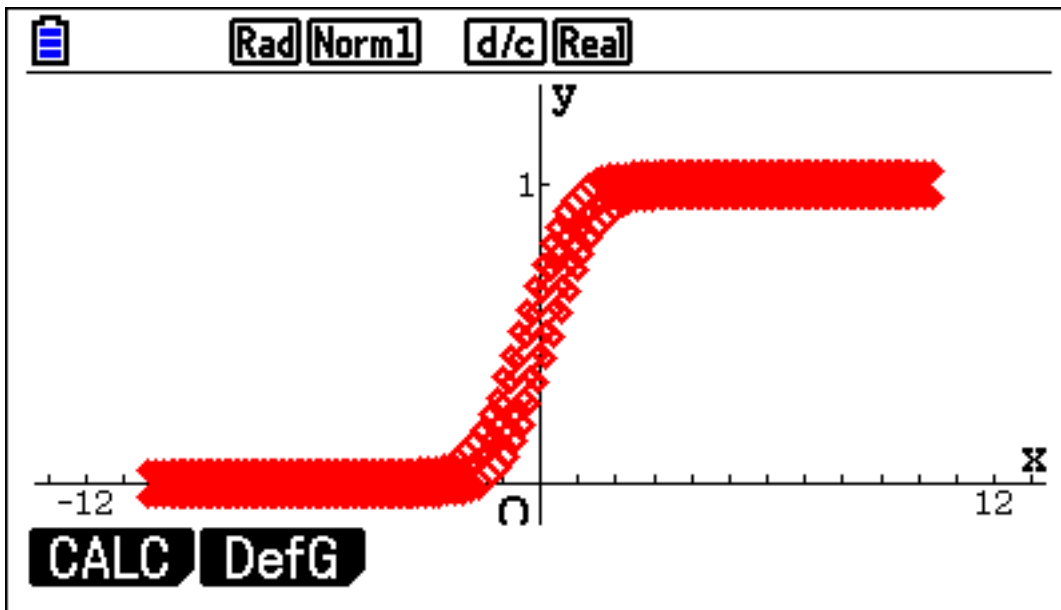


Standardizziamo i valori di List 1 rispetto alla distribuzione binomiale che ha media  $N \cdot P$  e deviazione standard  $\sqrt{N \cdot P \cdot (1 - P)}$ . e salviamo il risultato in List 3



Selezioniamo l'istogramma delle liste List 3 e List 2 dalla finestra dei grafici statistici





Selezionando il comando DefG possiamo accedere alla finestra di inserimento delle funzioni per selezionare la distribuzione cumulativa della distribuzione normale

Graph Func : Y=

Y1=NormCD(-100, x)

Y2 : [ — ]

Y3 : [ — ]

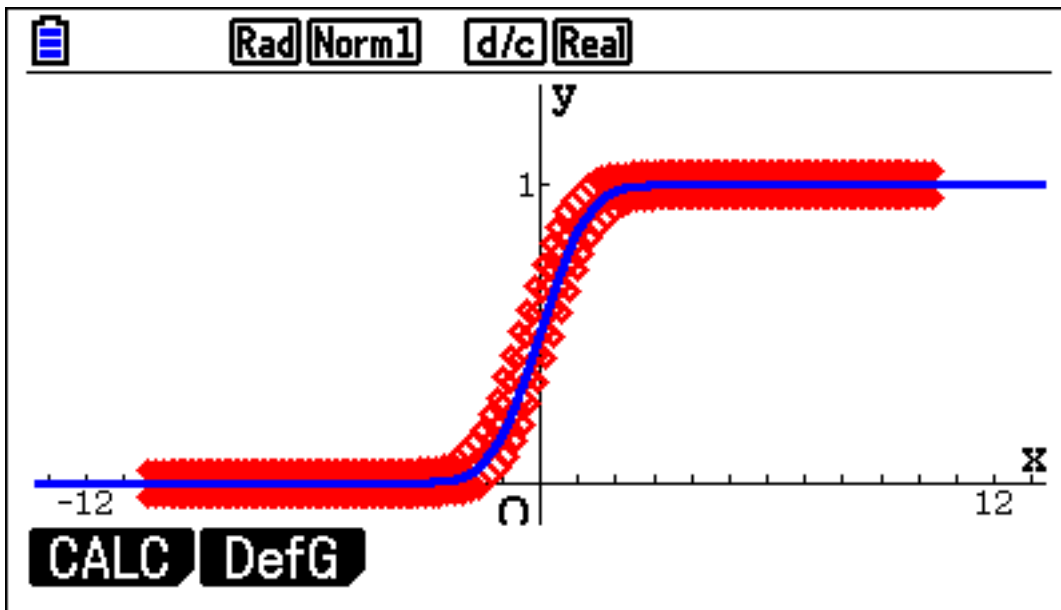
Y4 : [ — ]

Y5 : [ — ]

Y6 : [ — ]

**Y**

Selezionando il comando GRAPH è possibile disegnare il grafico della funzione cumulativa sul diagramma di dispersione precedente e notare graficamente la convergenza in misura della funzione cumulativa della distribuzione binomiale a quella della distribuzione normale.



**Esercizio** rappresentare le distribuzioni cumulative sull'intervallo  $[-3,3]$  in modo da vedere meglio la convergenza.