Convegno UMI-CIIM di Pavia: Laboratorio CASIO (I)

Enrico Rogora

In questo laboratorio si illustra l'uso della calcolatrice per rappresentare le funzioni e alcune delle costruzioni che si possono operare per definire nuove funzioni a partire da funzioni date, per esempio la funzione integrale di una funzione, la funzione derivata, l'inversa, la composta, la simmetrizzazione e l'antisimmetrizzazone. Le costruzioni vengono illustrate a partire dalla funzione logaritmo e esponenziale, fino ad arrivare alla funzione densità della distribuzione di probabilità gaussiana. L'idea di definire la funzione logaritmo attraverso un integrale e di studiare poi la funzione inversa di tale integrale è stata sperimentata didatticamente in numerosi corsi di calcolo a livello del primo anno universitario, per esempio in alcuni dei corsi di calcolo 1 per Infomatica e biologia alla Sapienza università di Roma e nel libro *Calclus* di Serge Lang. Si tratta di un approccio che si può generalizzare alla costruzione delle funzioni ellittiche, come mostrato da Gauss, Abel e Jacobi.

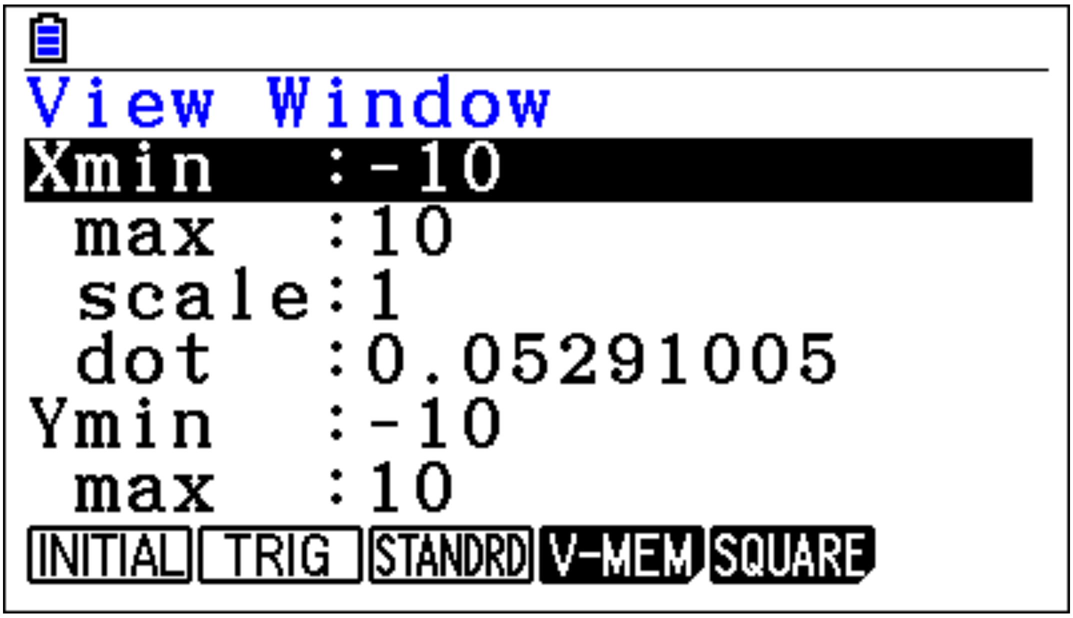
Rappresentiamo le funzioni

Disegnamo il grafico della funzione $\frac{1}{x}$

Uno dei punti di forza della calcolatrice è la possibilità di rappresentare graficamente una funzione e di manipolare facilmente i grafici delle funzioni.
Cominciamo col rappresengare il grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$.
Sullo schermo di una calcolatrice si può ovviamente rappresentare sono una porzione (finestra) del grafico di una funzione. Per definire tale porzione bisogna fissare i valori (o variabili di finestra) di `V–Window` (Visual Window).
Si accede alla finestra di impostazione selezionando dal `Menu Principale` l'opzione `V-Window`, premendo la successione di tasti

MENU 5 SHIFT F3

Selezioniamo dalla finestra `V-Window` l'impostazione `STANDARD` premendo il tasto
F3
che inizializza le variabili di finestra come mostrato in figura



Torniamo alla finestra di inserimento delle funzioni da rappresentare, premendo il tasto

EXIT

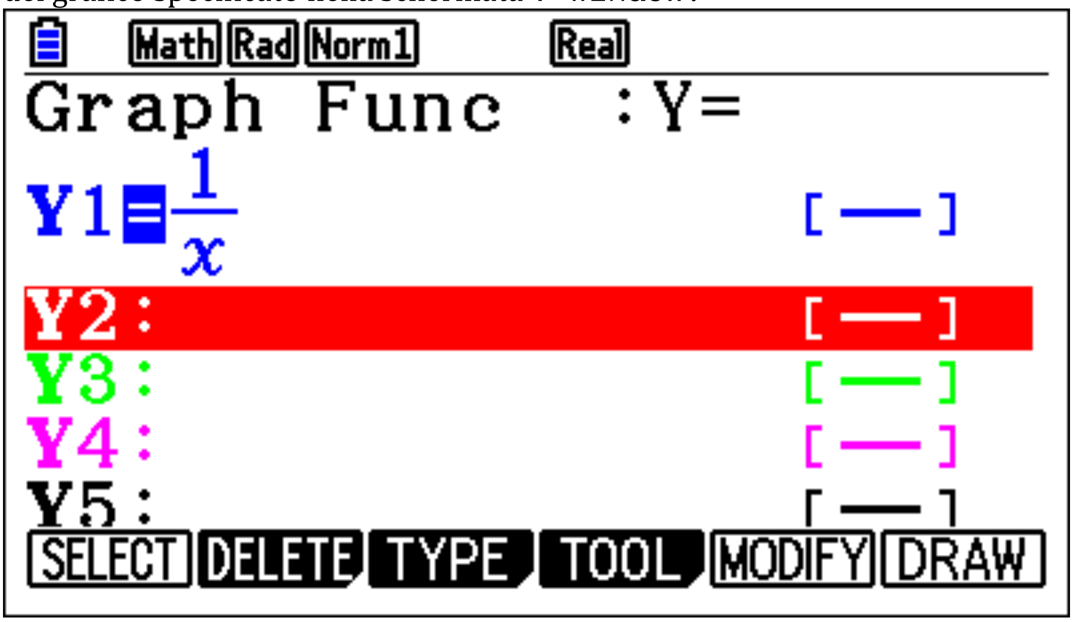
Dopo aver eventualmente cancellato le funzioni già presenti, muovendosi con il cursore e selezionado sopra ogni funzione da eliminare la combinazione di tasti

DEL F1

inseriamo nella riga Y1 la funzione $\frac{1}{x}$ con la sequenza di tasti

1 ÷ X,θ,T EXE

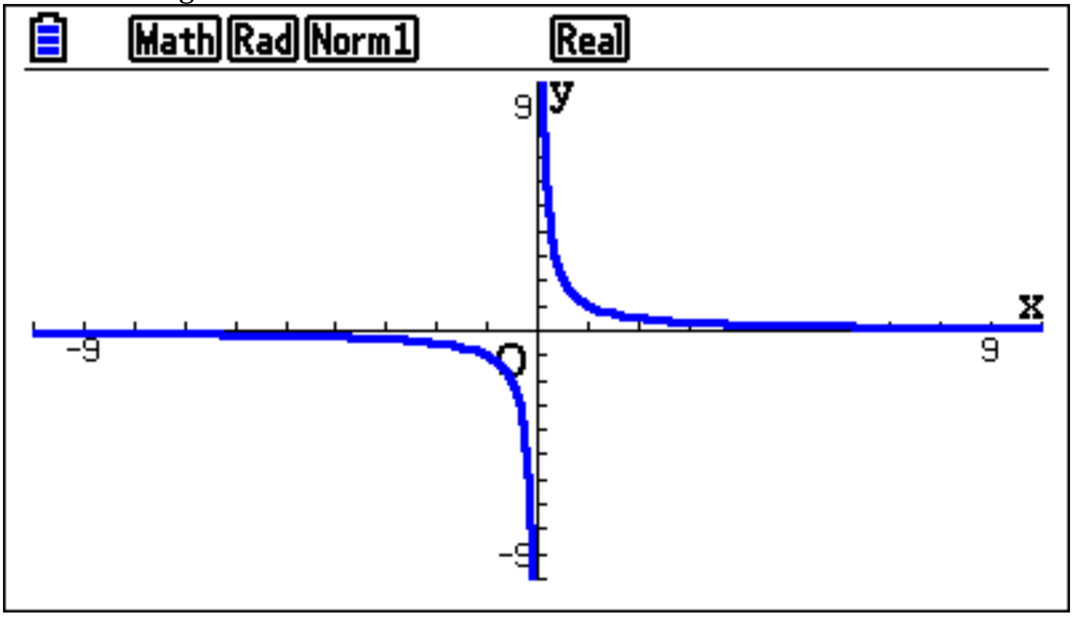
si noti il terzo tasto della combinazione che abbiamo usato per inserire la variabile. Non abbiamo usato il carattere per la X, che appare in rosso sopra il tasto della somma. Tali caratteri servono a indicare i registri dove memorizzare quantità numeriche e non vanno confusi con le variabile delle funzioni, che si inseriscono con il tasto delle variabili, che produce, secondo il contesto, la variabile numerica opportuna. Quando la finestra di inserimento uguale alla figura, la calcolatrice è pronta a disegnare sullo schermo la porzione del grafico specificato nella schermata `V-Window`.



Per disegnare il grafico, è sufficiente inviare il comando DRAW premendo il tasto

F6

Otteniamo il grafico



Si osservi che, le unità di misura scelte sugli assi x e y non sono coincidenti.

Definiamo una funzione con l’integrale

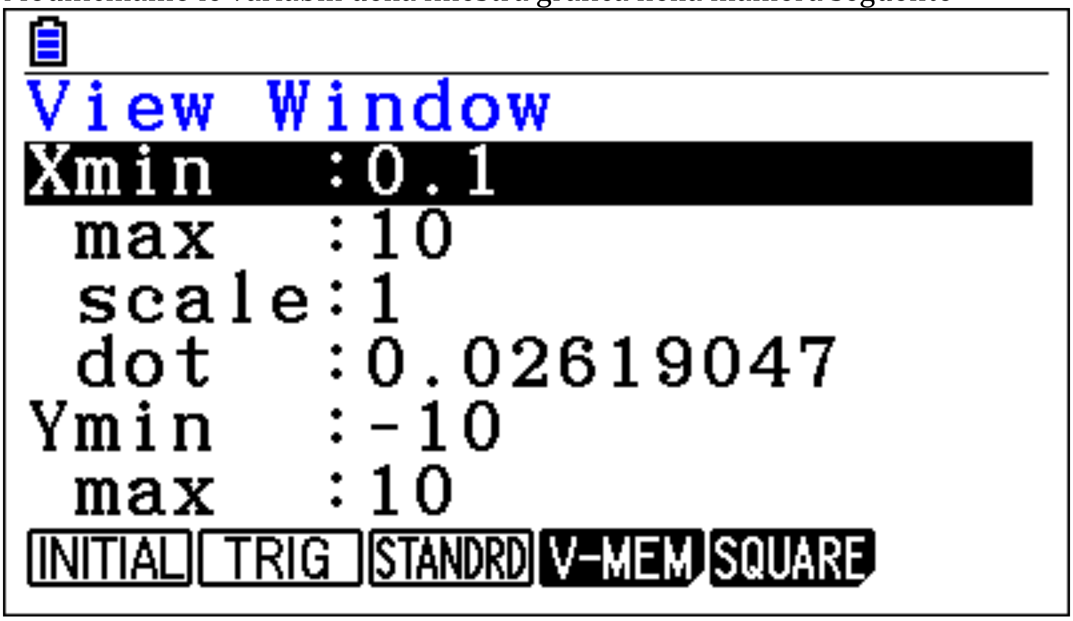
È possibile definire una funzione utilizzando gli operatori di integrazione e di derivazione messi a disposizione dalla calcolatrice grafica. Illustriamo come si possa definire una nuova funzione con l’integrale. A partire dalla schermata di inserimento, spostandoci con il cursore sulla riga corrispondente alla funzione Y2, definiamo la funzione $\int_1^x Y2\,dx$ premendo la sucessione di tasti

OPTN F2 F3 F1 1 ▼ 1 ▲ X,θ,T EXE

Se cerchiamo di rappresentare la funzione sulla finestra precedente ci viene inviato un messaggio d’errore, in quanto la funzione 1/x non è integrabile su un intervallo [a,1] quando a è un numero negativo.

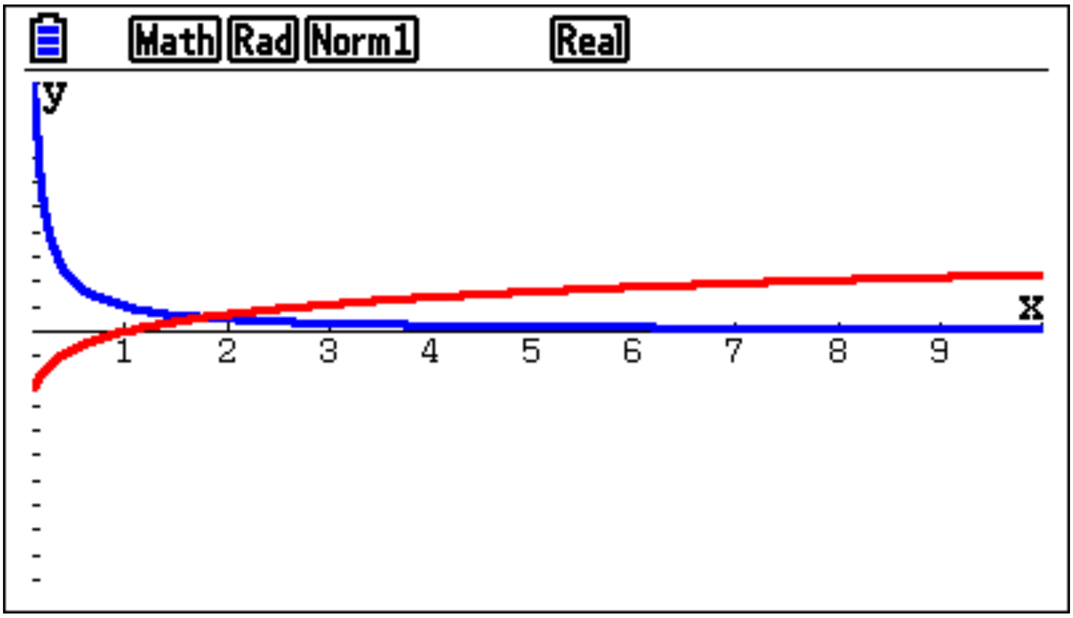
Modifichiamo la finestra grafica

Modifichiamo le variabili della finestra grafica nella maniera seguente



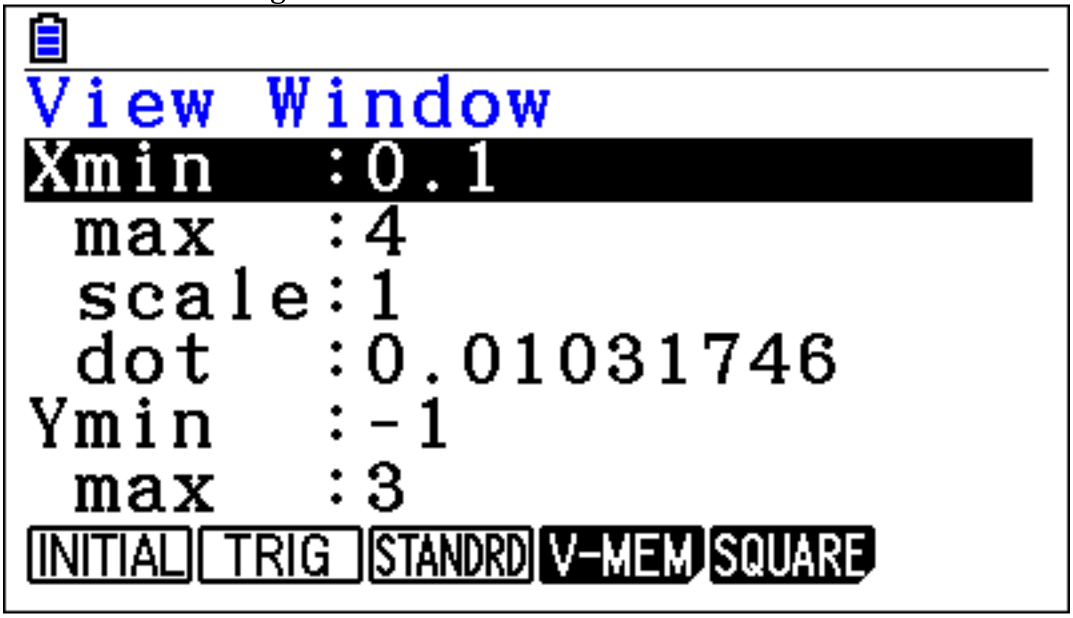
Possiamo ora tornare alla finestra di inserimento e disegnare il grafico con il comando DRAW.

Otteniamo

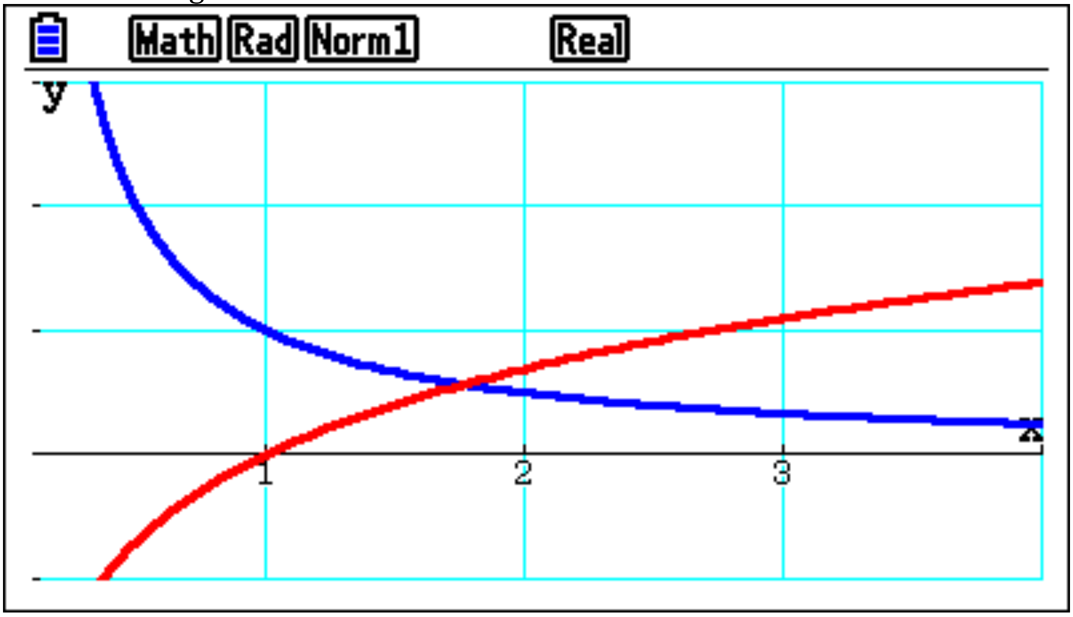


Strumenti per studiare le funzioni

Per approfondire lo studio delle funzioni che abbiamo disegnato, cambiamo la finestra `V-Window` come in figura



e otteniamo i grafici



Esploriamo i grafici con le funzioni del menu di esplorazione a cui si accede, nella finestra grafica, premendo eventualmente il tasto

SHIFT

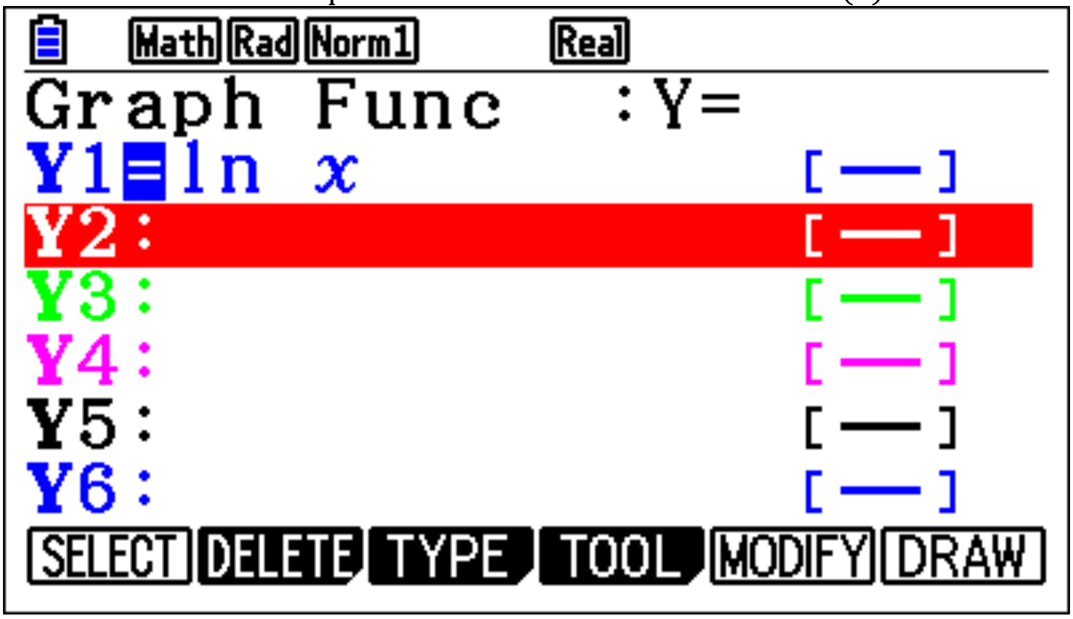
Essi sono `TRACE, ZOOM, V-WIN, SKETCH, G-SOLVE, G-T.`

Esercizio: usare queste funzioni per localizzare il punto di intersezione tra le due curve, per visualizzare la retta tangente per esplorare le coordinate dei punti del grafico, ecc.

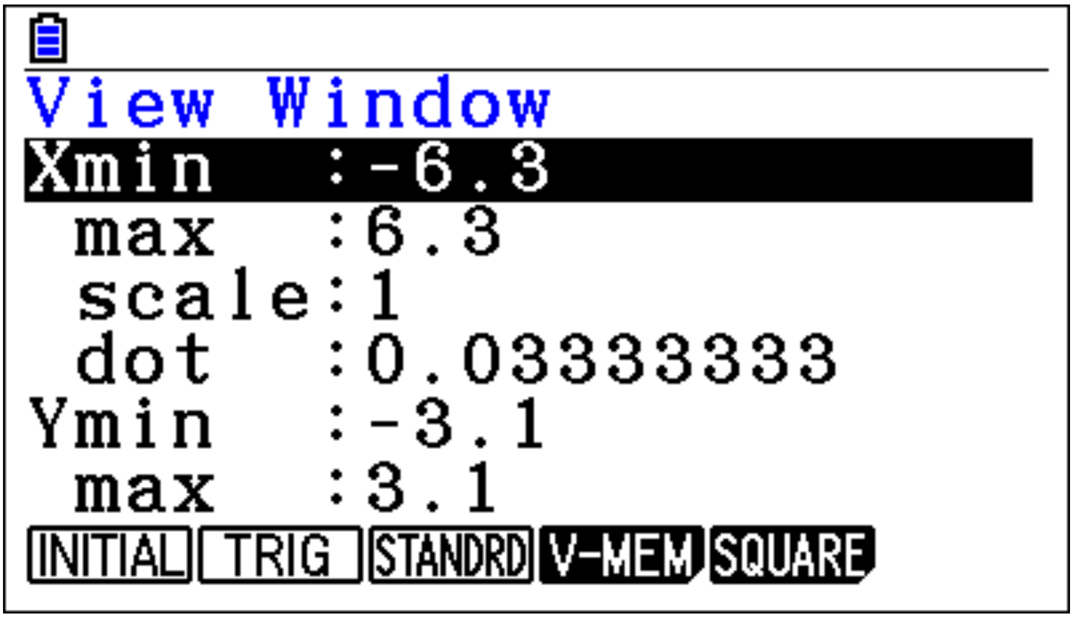
La funzione logaritmo e la funzione esponenziale

La funzione integrale che abbiamo cominciato a studiare graficamente è, come ben sappiamo, la funziona logaritmo in base **e**, il numero di Neper. Essendo una funzione crescente e quindi iniettiva è invertibile. Il grafico della sua inversa, la funzione esponenziale, può essere costruito con la semplice operazione geometrica di riflessione rispetto alla bisettrice del primo e secondo quadrante.

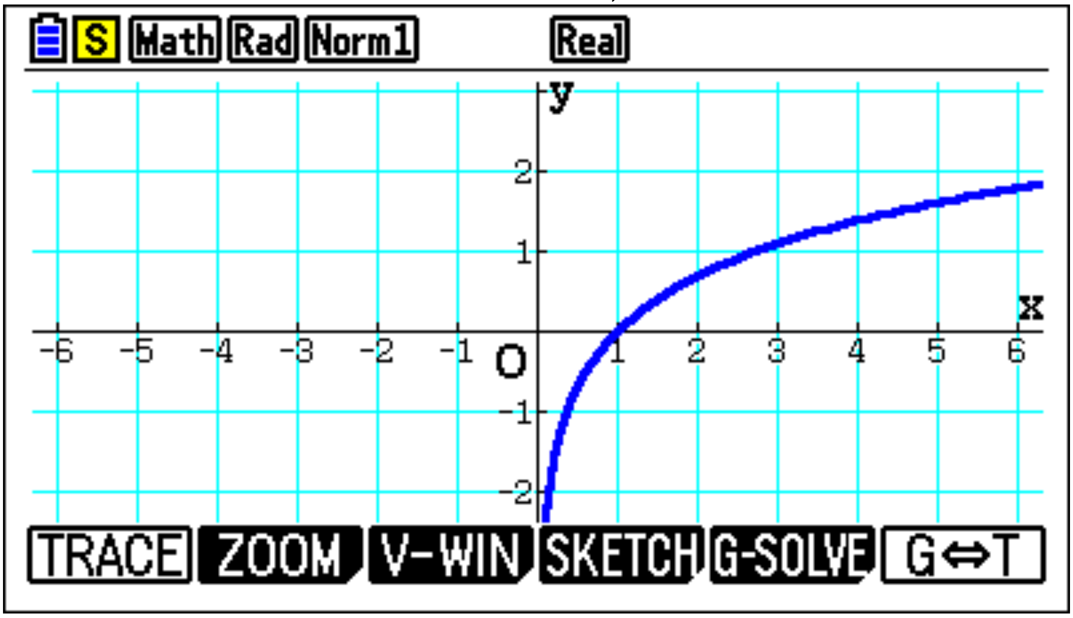
Cancelliamo le funzioni precedenti e inseriamo la funzione $\ln{(x)}$ nella finestra di inserimento.



Prepariamo la finestra di osservazione della funzione inserendo i valori di `V-Window` come in figura

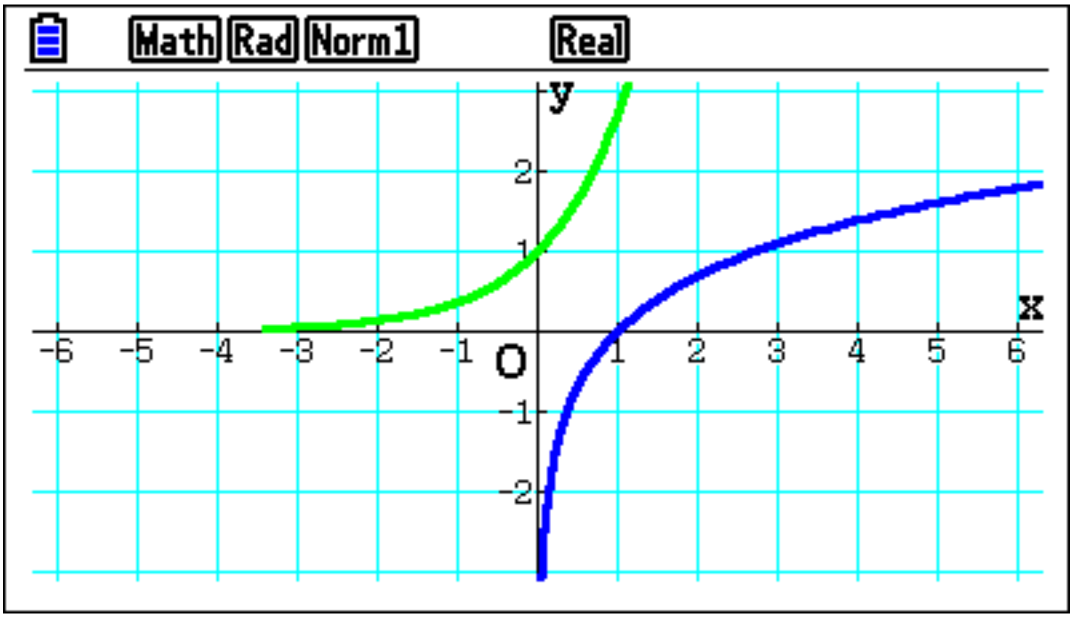


Dopo essere tornati allo schermo di inserimento e aver disegnato il grafico della funzione relativamente alla finestra di visualizzazione, selezionare



Selezionare l'opzione SKETCH e quindi l'operazione INVERSE per disegnare il grafico della funzione esponenziale entro la finestra fissata, premendo, dalla finestra grafica, i tasti

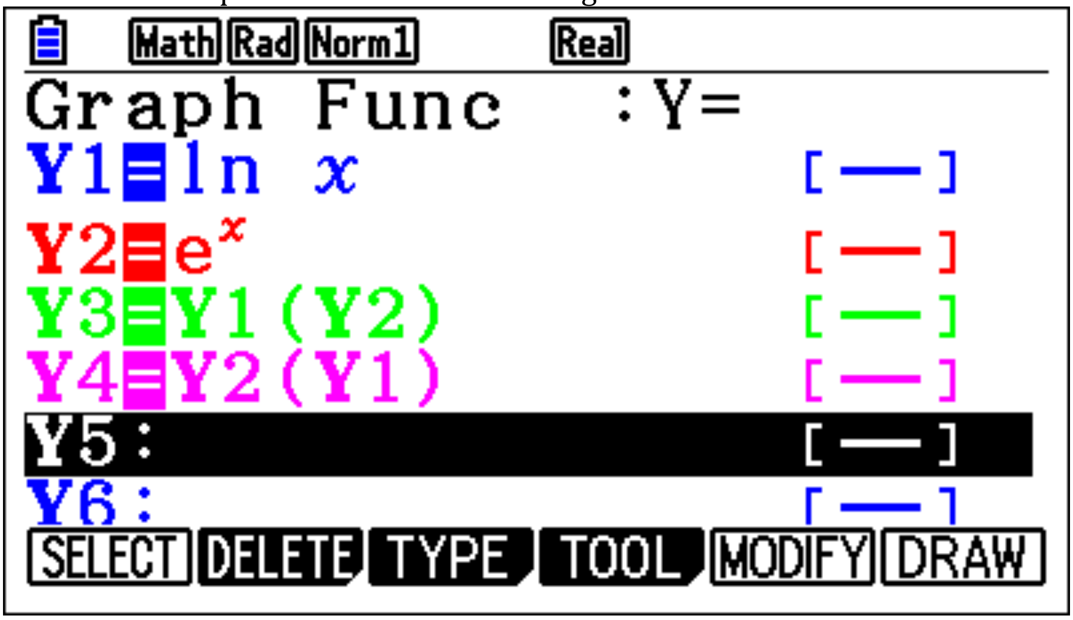
SHIFT F4 F4



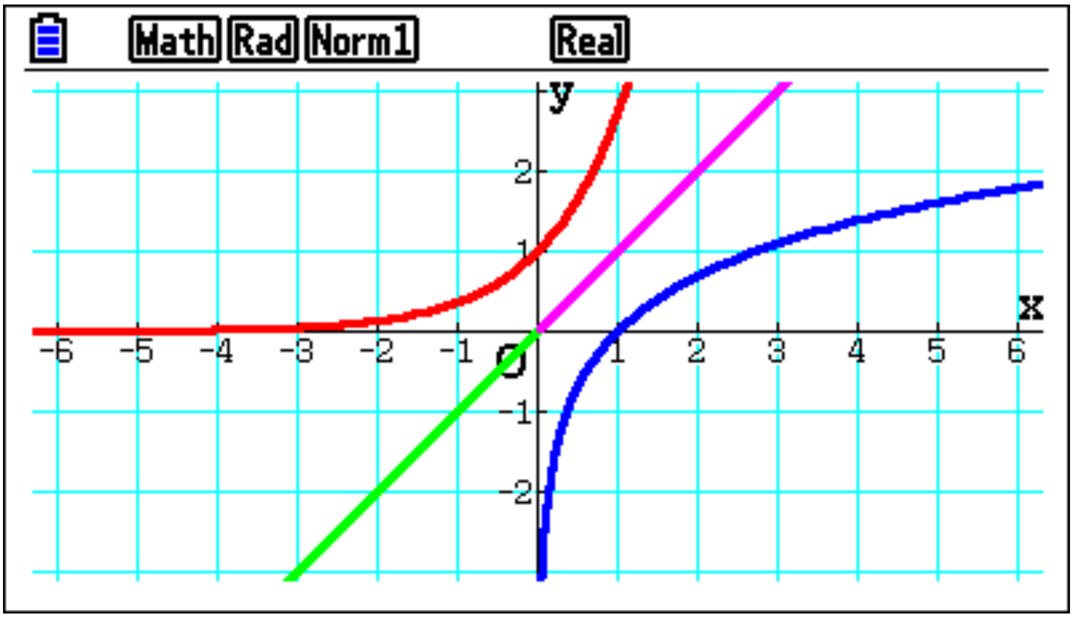
Esercizio Approssimare con TRACE il valore di exp(1).

La composizione di funzioni

È pssibile comporre due unfozioni e rappresentarne il relativo grafico in maniera molto naturale. Consideriamo, per esempio, le funzioni logaritmo e esponenziale, composte nello schermo di composizione nella maniera seguente.



Il commento dei grafici è istruttivo per capire il ruolo del dominio e del codominio nella composizione.

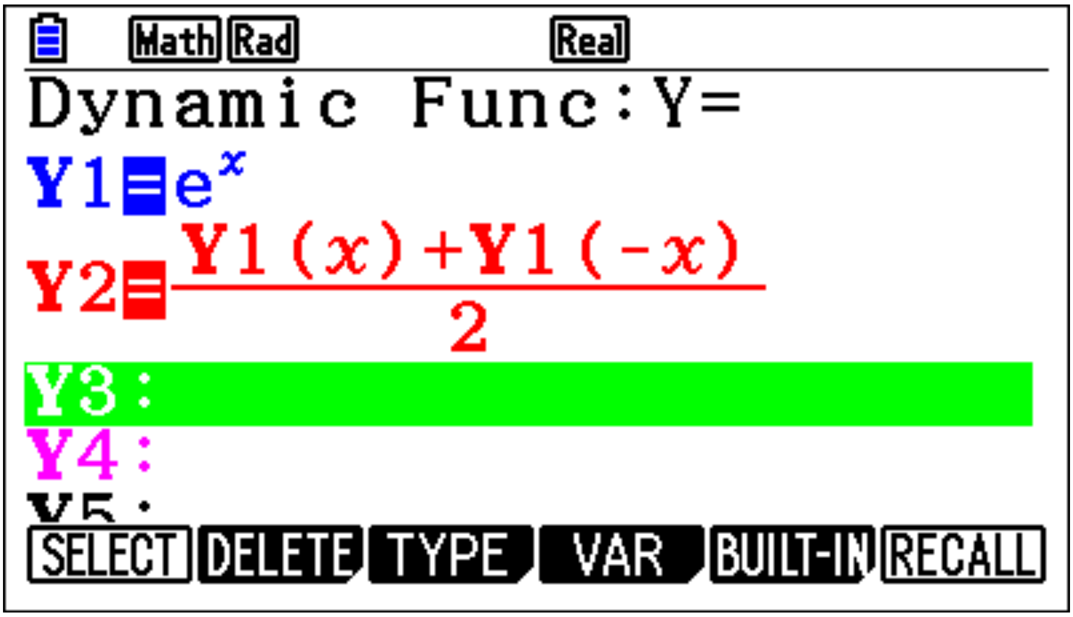


Esercizio Studiare come varia il grafico della funzione $D + C \cdot Y(Ax + B)$ a partire dal grafico di $Y(x)$ e dei valori A,B, C,D.
Cenno allo schermo `Dynamic function.`

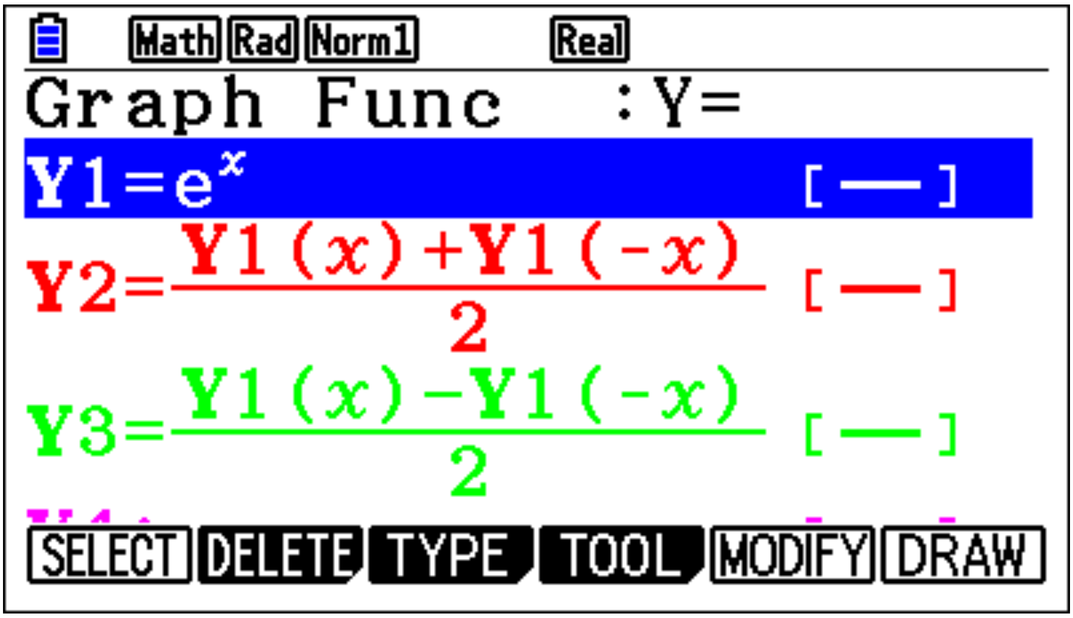
Simmetrizzazione e antisimmetrizzazione

Vogliamo studiare la simmetrizzazione e l'antisimmetrizzazione di una funzione. La figura dpresentata nello schermo di inserimento definisce la simmetrizzazione dell'esponenziale, ottenuta con la sequenza di tasti

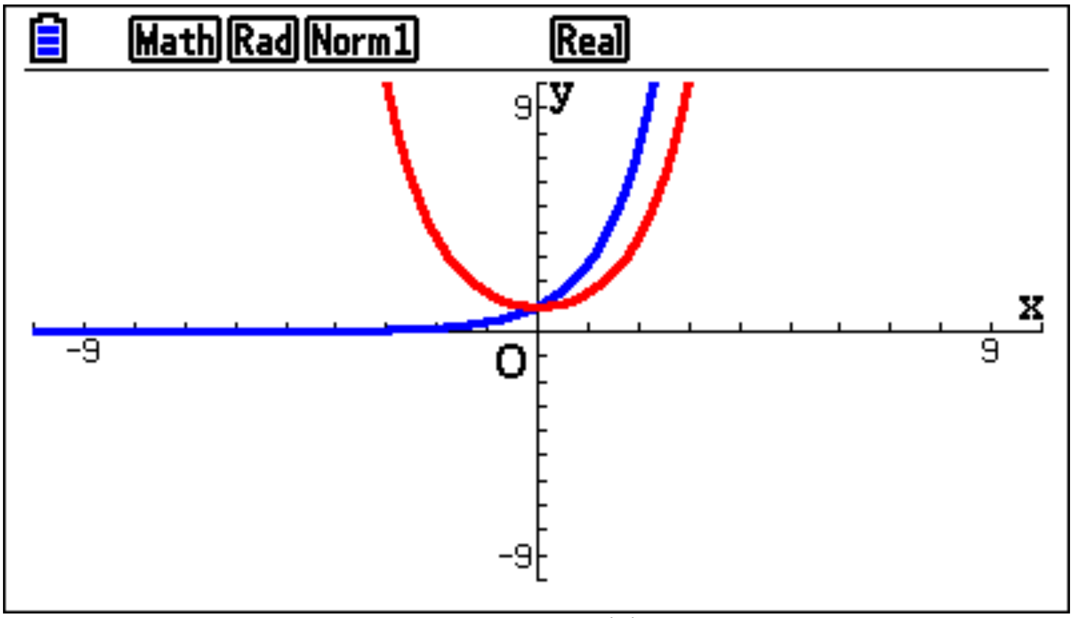
(F1 1 (X,θ,T) + F1 1 ((−) X,θ,T)) ÷ 2 EXE



L'antisimmetrizzazione si ottiene semplicemente sostituendo il segno di addizione con quello di sottrazione.

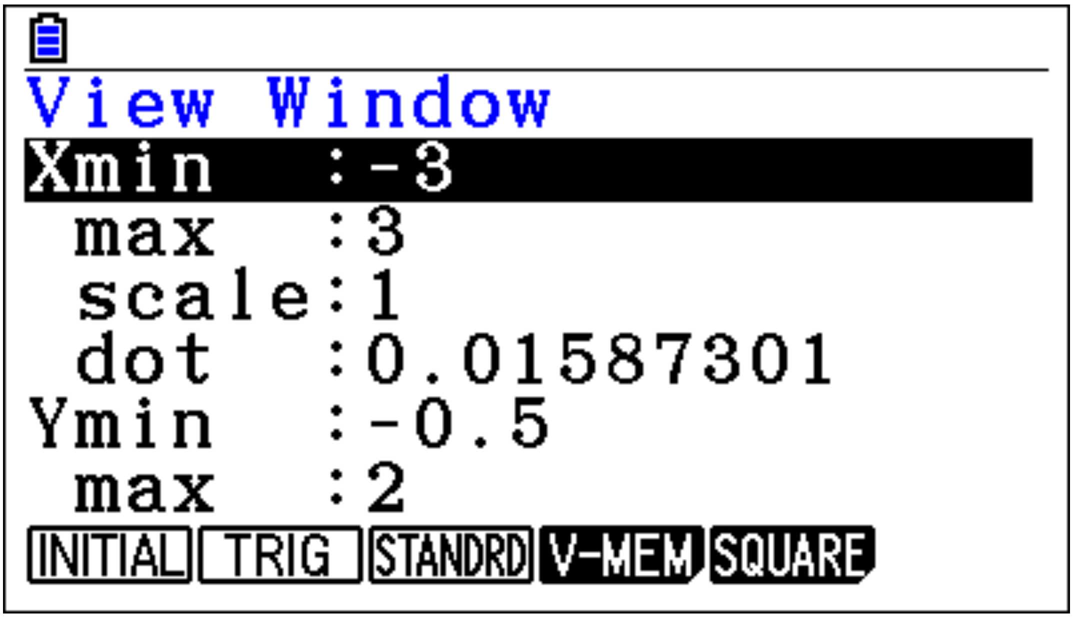


I grafici, nella finestra STANDARD della della funzione esponenziale e della sua simmetrizzazione sono

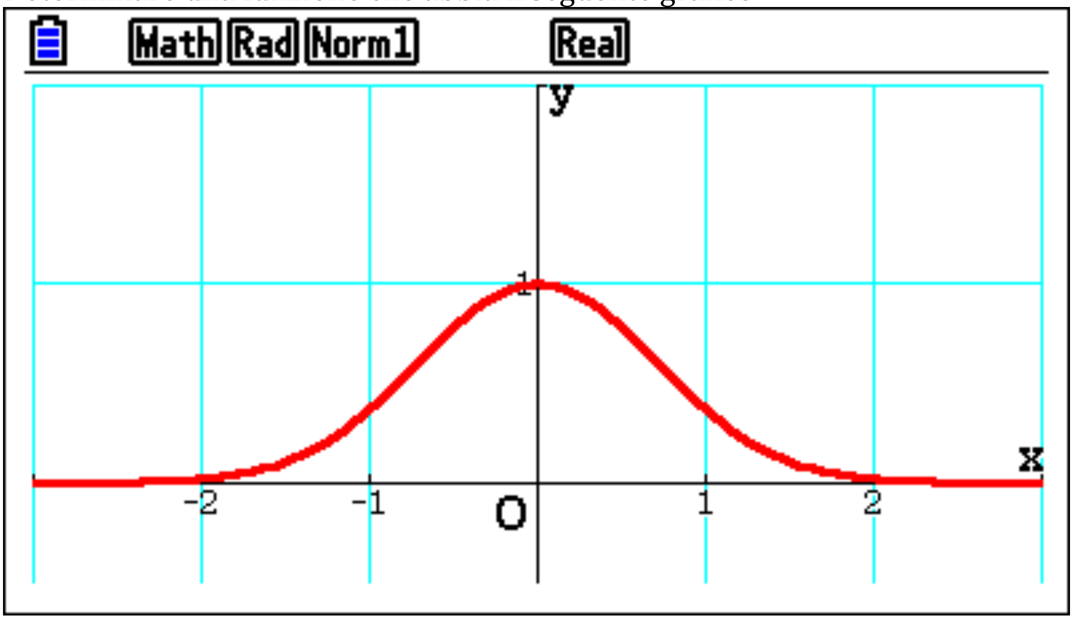


Esercizio Disegnare il grafico di e^{-x}, e^{-x}, $e^{-|x|}$

Esercizio Dopo aver fissato i parametri in `V-Window` come in figura



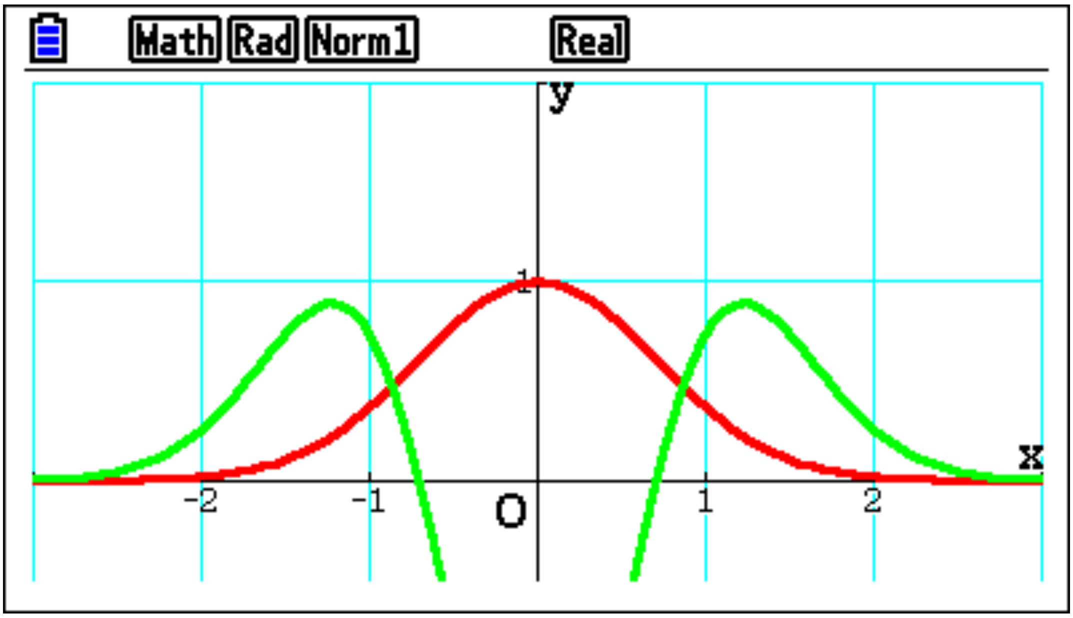
Determinare una funzione che abbia il seguente grafico.



Possiamo individuare i flessi di una funzione disegnando il grafico della sua derivata seconda e localizzando gli zeri. Per esempio, la funzione derivata seconda della *bump function* che abbiamo appena disegnato si può inserire nella finestra di inserimento premendo la sequenza di tasti

OPTN F2 F2 F1 2 (X,θ,T) ▶ X,θ,T EXE

Il grafico della bump function e della sua derivata è



Esercizio
Determinare una trasformazione della *bump function* dedotta dalla funzione esponenziale in maniera che i flessi siano nei punti ± 1 e che l'integrale totale sia uguale a 1.
Una tale funzione prende il nome di *Gaussiana normale* ed è la densità di distribuzione più omportante del calcolo delle probabilità.
Esercizio
Abbiamo introdotto la funzione esponenziale come inversa della funzione integrale di $\frac{1}{x}$. Cosa otteniamo seguendo lo stesso modo di procedere se partiamo invece dalle funzioni:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$