1 Prima configurazione

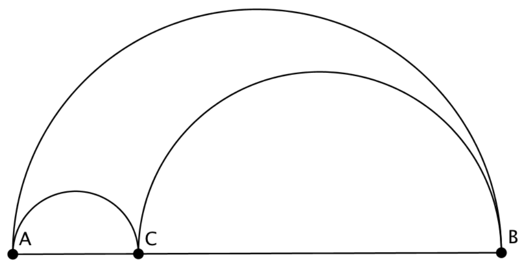

Figura N. 1

1.1 Commento alle vostre risposte

1.1.1 Descrivi la configurazione

Numero 2 Sono disegnate due semicirconferenze la cui somma dei diametri coincide con quello di una terza semicirconferenza, disegnata nello stesso semipiano. *Cosa si intende per somma dei diametri?.*

Numero 3 ALL'INTERNO DI UNA SEMICIRCONFERENZA S DI DIAMETRO AB, SONO DISEGNATE DUE SEMICIRCONFERENZE S1 e S2 RISPETTIVAMENTE DI DIAMETRO AC E CB, GIACENTI SU AB, TALI CHE IL DIAMETRO AB SIA LA SOMMA DEI DIAMETRI AC E CB *automatico* E CHE SIANO TANGENTI A DUE A DUE *automatico*; SI OTTIENE UNA FIGURA GEOMETRICA COMPRESA TRA LE TRE SEMICIRCONFERENZE

Numero 13 Ci sono 3 semicirconferenze con diametri diversi. Sul diametro AB della semicirconferenza più grande sono costruite le altre due semicirconferenze. *Non univocamente* Le due semicirconferenze più piccole si trovano entrambe dentro al semicerchio più grande.

1.1.2 Evidenzia i rapporti tra gli elementi elencati al punto precedente e descrivi la procedura per ottenere la configurazione

Cosa si intende per rapporti? La lingua matematica è povera e precisa.

Numero 2 Il diametro minore sembra essere lungo un terzo del secondo. *Come si verifica se un segmento è un terzo di un altro? Quanta generalità vediamo in una figura?*

Numero 6 AC è 1/4 di AB. AC è 1/3 di CB. CB è 3/4 di AB . CB è 3 volte AC. il rapporto che c'è tra i diametri vale anche per le lunghezze delle semicirconferenze. (ovviamente valgono le relazioni inverse). Per quanto riguarda le superfici dei semicerchi valgono le relazioni: il semicerchio di diametro AC è 1/16 del semicerchio di diametro AB; (semplifico la scrittura indicando sAB per dire semicerchio di diametro AB e così via....); sAC=1/9 sBC ; sBC=9/16 sAB quindi si può dire che la parte racchiusa tra le tre semicirconferenze è 6/16= 3/8 della sAB

Numero 9 1 a 1 3 a 1 4 a 1 3 a 4

Numero 11 I rapporti o le relazioni? Se le seconde, già contenute nella descrizione. *E i primi? Dal punto di vista logico è una risposte interessante*

1.1.3 Se non l'hai già fatto, descrivi la procedura per ottenere la configurazione

Numero 2 Disegna una semicirconferenza con raggio definito e una seconda con il raggio lungo tre volte, in modo tale che l'estremo di una tocchi l'estremo dell'altra, che i due diametri appartengano alla stessa retta e le due semicirconferenze allo stesso semipiano. Disegnane ora una terza con il diametro pari alla somma dei precedenti, che giace sempre sullo stesso semipiano. *Come si disegnano due circonferenze di dato raggio che sono tangenti?*

Numero 9 ac $ac \times 3$ $ac \times 4$ *Come si descrive una procedura?*

Numero 13 "Semicirconferenza più grande", "più piccola", "dentro al semicerchio".

1.1.4 Dai un titolo alla configurazione

Tenere ben distinte la fantasia, il rigore, la precisione, l'intuizione.

- I tunnel
- Arbelo
- Stesura di una tovaglia in un giorno di vento
- Semicirconferenze tangenti (numero 8)
- Semicirconferenze belle
- Le tre semicirconferenze o la ricerca dell'area massima (numero 13, è strano che non sia entrata poi come congettura).
- La fronte di Babbo Natale con cappello.
- Composizione di circonferenze.

- Vela al vento
- Metamorfosi di una circonferenza.
- vela da kit surf
- Pi greco

1.1.5 Proponi una o più congetture relative alla configurazione

Buongiorno, cosa si intende con "Proponi una o più congetture relativa alla configurazione"?

Una congettura è proprietà ipotizzata della configurazione. Per esempio si può ipotizzare, in una data configurazione, che il quadrato costruito sopra un certo lato è la somma dei quadrati costruiti su due altri lati.

Numero 2 Il peso sovrastante è equamente distribuito sui due tunnel. *Il peso non è una proprietà delle figure geometriche, ma può essere utile dal punto di vista euristico (cfr, Archimede)* (Possono sembrare due tunnel affiancati con diverso utilizzo. La cupola maggiore sostiene il carico complessivo).

Numero 3 IL PERIMETRO DELL'ARBELO È CONGRUENTE A QUELLO DELL'INTERA CIRCONFERENZA S DI DIAMETRO AB

Numero 6 La traiettoria di un salto di una pulce (puntiforme) - Una tenda da campeggio tirata dal vento - Un becco di tucano. *Cfr. la risposta relativa ai rapporti.*

Numero 7 Hai a disposizione una tovaglia e tre tuoi compagni, la tovaglia ha un lato il triplo dell'altro, riesci a realizzare altre figure? quante, quali? Il titolo (Stesura di una tovaglia in un giorno di vento) è accattivante per gli alunni.Trovare un modo simpatico per far ragionare gli alunni su immagini che spesso vediamo nei fenomeni quotidiani quindi sulle semicirconferenze, senza parlare di geometria, ma provando in classe con materiali di uso quotidiano. Ovviamente la teorizzazione verrà poi guidata. *Difficoltà di tenere ben distinti creatività, rigore, intuizione, precisione.*

Numero 8 La domanda che mi sono posta è quali relazioni ci sono tra queste tre semicirconferenze? La loro peculiarità è la costruzione: due semicirconferenze tangenti e di diametro rispettivamente AC e CB sono costruite sul diametro AB di una semicirconferenza più grande, dove AB=BC+AC. Forse sussiste qualche relazione tra i le aree o le loro lunghezze.

1. Sicuramente la somma delle aree dei due semicerchi è diversa dall'area del semicerchio più grande. Dopo qualche calcolo ho trovato che la relazione riguarda le lunghezze delle semicirconferenze:

2. La lunghezza della semicirconferenza di diametro AB è uguale alla somma delle lunghezze della semicirconferenza di diametro AC e quella di diametro BC.

Numero 9 Come dividere un arco in parti uguali *Tanti modi: nessuno con riga e compasso*

numero 11 se AC=(1+fi)AB (con fi=[1+radq(5)]/2) allora BC è medio proporzionale tra AC e AB. *Questo è un teorema che non riguarda la configurazione. È interessante però chiedersi cosa intendiamo per configurazione geometrica.*

Numero 12 Relazione proporzionale tra i diametri. *Rapporto (tra due grandezze omogenee), proporzione (uguaglianza di rapporti)*

Numero 15 Il salto iniziale da A a B è più ampio , il punto ha più energia. Nel ritorno l'energia diminuisce , le traiettorie sono meno ampie.

Numero 16 1.Babbo Natale si sta nascondendo da un bambino che è entrato nella stanza.

2. E' il momento in cui babbo natale entra nel camino

Numero 17 L'area della regione compresa tra la semicirconferenza più grande e le due più piccole è un multiplo intero dell'area di almeno una delle due semicirconferenze interne. *Modifica: esiste sempre una posizione per cui?*

Numero 18 Calcola il contorno della figura definita dagli archi AB- AC - CB. Calcola la superficie compresa tra le semicirconferenze. *Differenza tra un problema, un teorema e una congettura*

Numero 21 L'area della regione di piano delimitata dalle semicirconferenze è multiplo del prodotto $x(d-x)$ secondo il fattore $\pi/2$. Nel caso specifico della configurazione $d = 4x$ esso vale $3/2\pi x^2$.

Numero 33 unire i punti disegnati su un segmento con delle curve. *generalizziamo: per esempio costruiamo dei triangoli equilateri*

1.1.6 Esponi brevemente le motivazioni del titolo e proponi una strategia per la dimostrazione della congettura proposta

Numero 4 Per dimostrare la congettura posso procedere per tentativi, stabilendo dei rapporti arbitrari tra i diametri, quindi calcolare la lunghezza delle varie semicirconferenze e cercare di trovare una regolarità dalla quale poter estrapolare una regola generale. *Dimostrare nelle scuole medie? Certamente non usare la parola dimostrazione impropriamente: usare piuttosto* argomento euristico*,* evidenza sperimentale*,* verifica in qualche caso

Numero 8 Le tre semicirconferenze sono tra loro tangenti: ciascuna delle due interne a quella esterna e tra loro tangenti.

1. Non vi è relazione tra le aree: $\pi AC^2 + \pi BC^2 = \pi(AC^2 + BC^2)$ che è diverso da πAB^2 perché $AC+BC = AB$ ma l'uguaglianza non vale anche per i loro quadrati.

2. La lunghezza della semicirconferenza di diametro AB è uguale alla somma delle lunghezze della semicirconferenza di diametro AC e quella di diametro BC: $\pi AC + \pi BC = \pi(AC + BC) = \pi AB$.

Numero 9 Come calcolare il tutto partendo dalla scoperta della unità di misura. *L'unità di misura è arbitraria nella geometria euclidea. Come misuro i segmenti a partire da un segmento unità?*

1.2 Le nostre risposte

Descrivi la configurazione Si prenda un punto C su un segmento AB. Si traccino, nello stesso semipiano, le semicirconferenze di diametro AC, CB e BC.

Evidenzia i rapporti tra gli elementi elencati al punto precedente e descrivi la procedura per ottenere la configurazione Le tre circonferenze sono tangenti a coppie in A, B e C rispettivamente.

Se non l'hai già fatto, descrivi la procedura per ottenere la configurazione Si scelgano due punti A e B. Si tracci il segmento AB. Si scelga un punto C su AB. Si tracci, con centro nel punto medio di AB la circonferenza passante per A, con centro nel punto medio di AC la circonferenza per C, con centro nel punto medio di CB la circonferenza per B. Si consideri l'intersezione del disegno con uno dei due semipiani.

Dai un titolo alla configurazione Il cappello dello gnomo.

Proponi una o più congetture relative alla configurazione La lunghezza della semicirconferenza più grande è la somma delle lunghezze delle circonferenza più piccole. L'area del cappello è uguale all'area del cerchio di centro C e di raggio uguale al segmento CD staccato dalla semicirconferenza più grande sulla retta ortogonale ad AB per C.

Esponi brevemente le motivazioni del titolo e proponi una strategia per la dimostrazione della congettura proposta La parte compresa tra le tre semicirconferenze sembra un cappello a punta. La prima congettura si dimostra usando la formula per il calcolo della semicirconferenza in funzione del raggio. La seconda, usando la formula per il calcolo dell'area di cerchi e semicerchi e il secondo teorema di Euclide, secondo cui l'altezza CD relativa all'ipotenusa AB del triangolo rettangolo ABD è media proporzionale tra le proiezioni AC e CB dei cateti AD e DB sull'ipotenusa.

2 Osservazioni generali

Le domande delle schede non erano troppo precise: non volevamo risposte giuste o sbagliate, ma spunti per discutere.

Insegnare la matematica è un po' come insegnare a parlare: il significato delle parole deve essere molto preciso, per questo esercizi di questo genere sono utili, è necessario uno sforzo per capire quello che ci viene detto.

Problema emerso dalle schede: è necessario legare la matematica alla realtà ma è molto importante non fare confusione tra i diversi piani: fantasia, rigore, precisione, intuizione.

Noto la difficoltà di formare congetture se si guarda *staticamente* alla configurazione. Figura generale (in cui non si fissano i rapporti) e figura particolare (in cui si fissano i rapporti). Notare però che alcuni rapporti sono determinati dalla costrizione anche se non sono fissati (angoli retti nel cappello dello gnomo, segmenti uguali del faccia a faccia)

Condizione necessaria per avere una strategia per affrontare una congettura è che la congettura sia precisa e "poco fantasiosa".

Matematica, linguaggio, logica rigore. Scuole medie, inizia a manifestarsi l'esigenza al rigore, alla logica, al ragionamento deduttivi. Importanza di abituare ad utilizzare un linguaggio preciso, non formalizzato, ma specifico: dimostrazione (euclidea, platonica), congettura, figura geometrica.

Importanza delle costruzioni (con geogebra).

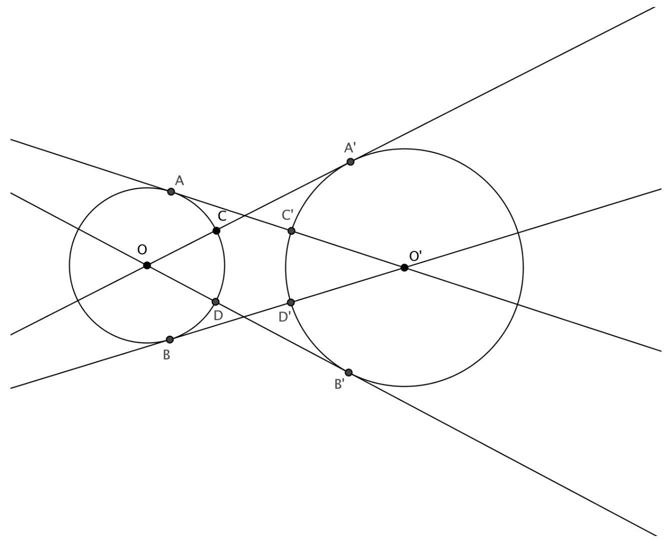

Figura N. 4

Descrivi la configurazione Siano O e O' i centri di due circonferenze c e c' che non si intersecano. Si conducano da O le tangenti a c' e siano A' e B' i rispettivi punti di contatto. Si conducano da O' le tangenti a c e siano A e B i rispettivi punti di contatto.

Evidenzia i rapporti tra gli elementi elencati al punto precedente e descrivi la procedura per ottenere la configurazione Il segmento OA è ortogonale alla tangente O'A. Analogamente per OB, O'A' e O'B'.

Se non l'hai già fatto, descrivi la procedura per ottenere la configurazione Per determinare i punti A, B (risp. A', B') si interseca la circonferenza c (risp. c') con la circonferenza di diametro OO'.

Dai un titolo alla configurazione Faccia a faccia

Proponi una o più congetture relative alla configurazione I segmenti CD e C'D' sono congruenti

Esponi brevemente le motivazioni del titolo e proponi una strategia per la dimostrazione della congettura proposta Sembrano due facce che si guardano. Sia H' il punto di mezzo del segmento C'D'. I triangoli OO'A e C'H'O' sono rettangoli con un angolo comune, quindi sono simili. Allora O'C':C'H'=OO':OA. Sia H il punto di mezzo del segmento CD. I triangoli OO'A' e CHO sono rettangoli con un angolo comune, quindi sono simili. Allora OC:CH=OO':O'A'. Ma OC=OA e O'C'=O'A'. Quindi le due proporzioni implicano l'asserto.