La configurazione di Desargues

Luca Sbano

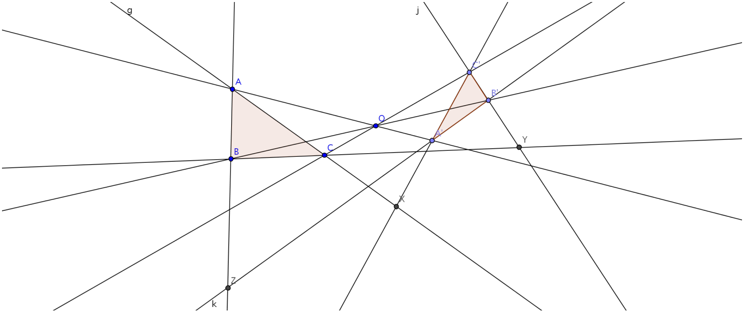
Licei *Vittoria Colonna*,
Roma

Seminari per il Liceo Matematico, 15/12/2017

Motivazioni

- Far riflettere sulle modalità di come si osserva e si ragiona, si riprende quindi la scheda di osservazione e ci si concentra sugli ultimi punti.
- Si torna al percorso verso la nozione di *congettura*.
- Un occasione per cercare di vedere possibili strategie dimostrative in un contesto, la configurazione di Desargues, più per docenti e non suggeriamo che sia presentato agli studenti.
- Al fine di superare le tipiche difficoltà iniziali che gli studenti incontrano nel dimostrare proposizioni matematiche si richiede di trovare *strategie* più che dimostrazioni.
- L'insegnante dovrebbe guidare gli studenti nell'analisi dei loro approcci estraendo da essi quanto ci possa essere di utile alla costruzione di una strategia dimostrativa che sia in generale significativa dal punto di vista matematico.

La configurazione di Desargues



Il movimento muove le idee. Emma Castelnuovo

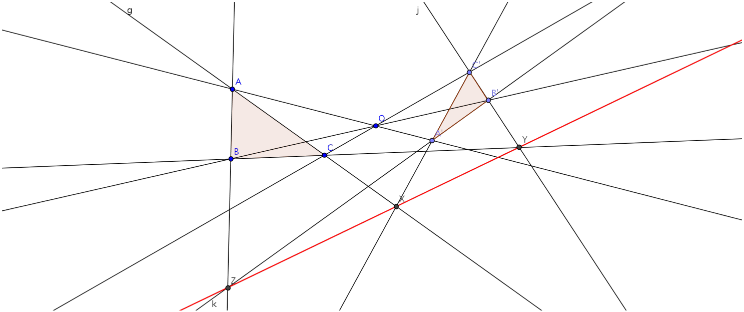
È conveniente osservare la configurazione di Desargues dinamicamente....geogebra...

Osservare una configurazione geometrica

Gli studenti verranno invitati a sceglièreuna delle configurazioni e poi dovranno rispondere alle seguenti domande:

- Descrivi la configurazione in modo tale che un tuo compagno, che non l'ha vista, la sappia costruire.
- Quali sono, secondo la tua opinione, gli elementi fondamentali?
- Replica la costruzione con riga e compasso o con un software (es: GeoGebra).
- Nel disegno esistono proprietà che puoi immaginare essere vere (*congetturare*)?
- Confronta le tue *congetture* con quelle dei tuoi compagni.
- Sapresti proporre una strategia per dimostrare le proprietà che hai *congetturato*?
- Confronta le tue *strategie* con quelle dei tuoi compagni.

Congettura



Definizioni e enunciato

Definizione

Due triangoli ABC e $A'B'C'$ si dicono prospettivi rispetto ad un punto O se le rette AA', BB' e CC' si incontrano in O.

Definizione

Due triangoli ABC e $A'B'C'$ si dicono prospettivi rispetto ad una retta se le rette di lati omologhi AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AC e $A'C'$ si incontrano in punti allineati su una stessa retta.

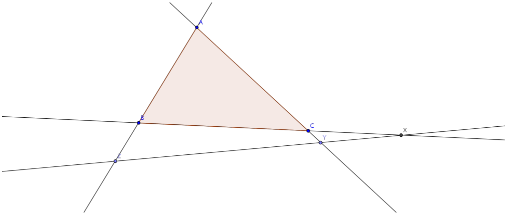
Teorema (Teorema di Desargues)

Due triangoli ABC e $A'B'C$‘ privi di vertici e lati in comune sono prospettivi rispetto ad un punto se e solo se sono prospettivi rispetto ad una retta.

Modelli di dimostrazione

- Dimostrazione sintetica usando il teorema di Menelao.
- Dimostrazione analitica nel piano usando le coordinate proiettive.
- Usare i birapporti.
- Usare il teorema di Pappo.
- .....altre dimensioni...

Teorema di Menelao (Bello ed utile!)



Teorema

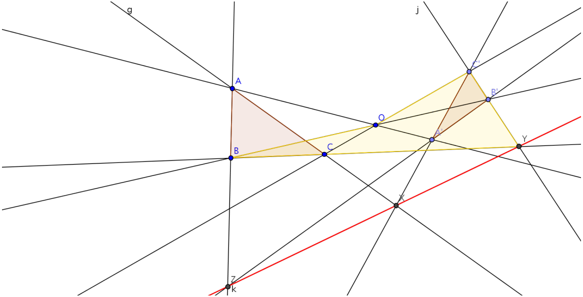
Sia dato il triangolo ABC e tre punti: X sulla retta BC; Y sulla retta AC; Z sulla retta AB. Allora i tre punti sono allineati se e solo se:

$$\frac{BX}{CX}\,\frac{CY}{AY}\,\frac{AZ}{BZ} = 1$$

Dimostrazione per via sintetica

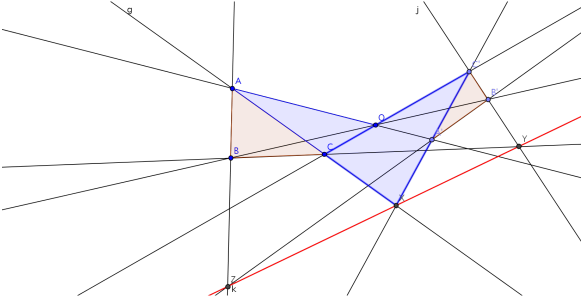
Occorre guardare alla configurazione di Desargues come si guarda alla ricerca della stella di Lloyd... ma con gli *occhiali* di Menelao...

Dimostrazione per via sintetica



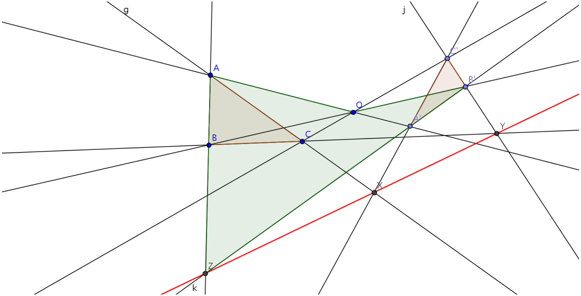
$$\frac{CC'}{OC'}\,\frac{OB'}{BB'}\,\frac{BY}{CY} = 1$$

Dimostrazione per via sintetica



$$\frac{AA'}{OA'}\,\frac{OC'}{CC'}\,\frac{AX}{CX} = 1$$

Dimostrazione per via sintetica



$$\frac{BB'}{OB'}\,\frac{OA'}{AA'}\,\frac{AZ}{BZ} = 1$$

Dimostrazione per via sintetica

Ora il prodotto delle tre relazioni:

$$\frac{CC'}{OC'}\,\frac{OB'}{BB'}\,\frac{BY}{CY} = 1$$

$$\frac{AA'}{OA'}\,\frac{OC'}{CC'}\,\frac{CX}{AX} = 1$$

$$\frac{BB'}{OB'}\,\frac{OA'}{AA'}\,\frac{AZ}{BZ} = 1$$

si ottine

$$\frac{BY}{CY}\,\frac{CX}{AX}\,\frac{AZ}{BZ} = 1$$

ovvero la condizione di allineamento del teorema di Menelao.

Per poter dimostrare nel modo più rapido la congettura i punti X, Y e Z incidono sulla stessa retta è necessario guidare lo studente verso una lettura in tre dimensioni del problema e ad una visione che utilizzi alcune nozioni di geometria proiettiva.

La configuazione di Desargues si può analizzare in modo più naturale utilizzando la geometria nello spazio. In particolare utilizzando la geometria proiettiva.

È necessario costruire la configurazione in tre dimensioni...geogebra...

Assiomi della geometria proiettiva

Gli assiomi che seguono giocano un ruolo importante nella dimostrazione

1. In un piano, due punti distinti determinano una ed una sola retta.
2. In un piano, due rette distinte determinano uno ed un solo punto.
3. Due punti determinano una ed una sola retta. Tre punti che non stiano sulla stessa retta determinano uno ed un sol piano.
4. Due rette si intersecano in uno ed un solo punto e appartengono ad uno ed un solo piano.
5. Due piani distinti determinano una ed una sola retta. Tre piani che non passano per la stessa retta determinano un solo punto.

Osservazione: la dualità

Scambiando punto con piano il primo ed il secondo, il terzo ed il quinto assioma si scambiano.
Molti enunciati sono simmetrici sotto lo scambio

$$\text{punto} \leftrightarrow \text{piano}$$

e questo permette di derivare nuovi teoremi da teoremi già dimostrati.

L'inverso del teorema di Desargues è duale del suo inverso.

CN La dimostrazione (nello spazio)

- Le rette AA' e BB' giacciono in un sol piano π per l'assioma n.3.
- Le rette AB e $A'B'$ appartegono a π e quindi per l'assioma n.2 detrminano un punto T.
- Similmente si costruiscono i punti S e T.
- I triangoli ABC e $A'B'C'$ giacciono su due piani diversi, detti: π_1 e π_2; per l'assioma n.1 si ha $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, $T \in r$ poichè la retta AB è in π_1 mentre la retta $A'B'$ è in π_2.
- I punti R, S e T sono nell'intersezione dei due piani e quindi sono su r.

La dimostrazione (nel piano)

Se i due triangoli ABC e $A'B'C'$ giacciono nello stesso piano ci si può ricondurre al caso spaziale con apposita costruzione. Usiamo nuovamente geogebra

Grazie per la partecipazione!