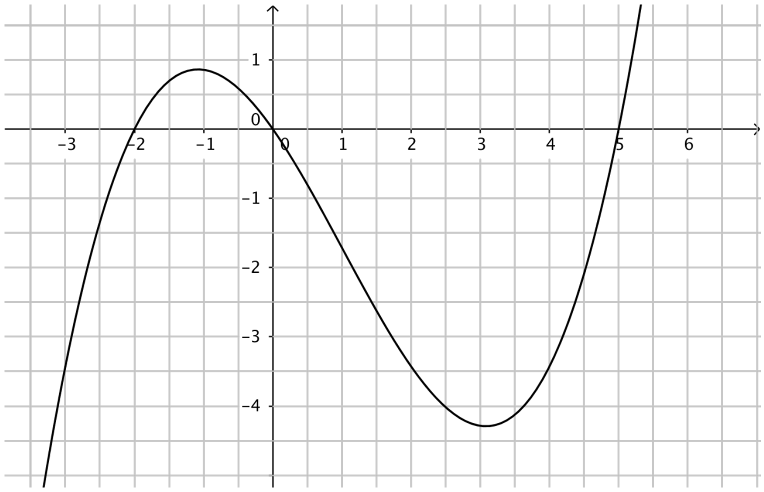
LICEO MATEMATICO - Palestra Calcolatrici CASIO - **Secondo Test**
Francesco Bologna - Enrico Rogora
Mirabella, 11 Luglio 2017

Problema 1

In figura è rappresentato il grafico di una certa funzione $y = f(x)$.



Dire, motivando la riposta, se la funzione è invertibile sull'intervallo $[1; 4]$. Sia g la funzione inversa di f sull'intervallo $[-1; 3]$. Dire, motivando la risposta, a quale dei seguenti intervalli

1. $[-2; -1]$
2. $[-1; 0]$
3. $[0; 1]$
4. $[1; 2]$
5. $[2; 3]$

appartengono i seguenti valori

1. $g(-1) + g(-2)$
2. $g(f(1)) + f(g(-2,5))$
3. $f(0,5) + g(-2,5)$
4. $g(1,5)$

Soluzione. La funzione f non è invertibile sull'intervallo $[1; 4]$ in quanto non è iniettiva, come si verifca osservando che esistono parallele all'asse delle x che intersecano in più di un punto il grafico della funzione sopra detto intervallo.

Usando la funzionalità `Trace` della calcolatrice, possiamo verificare graficamente che $g(-1) \in [0,57; 0,64]$; $g(-2) \in [1,14; 1,21]$. Quindi $g(-1) + g(-2) \in [1,81; 1,85] \subseteq [1,2]$. Il valore dell'espressione proposta appartiene quindi all'intervallo numero quattro.

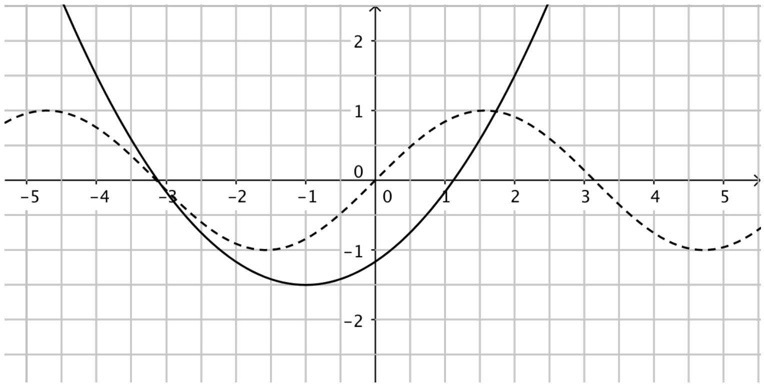
Per definizione di funzione inversa $g(f(1)) = 1$ e $f(g(-2,5)) = -2,5$. La somma quindi vale $-1,5 \in [-2; -1]$. Il valore dell'espressione proposta appartiene quindi all'intervallo numero uno.

Usandola funzionalità `Trace` della calcolatrice, possiamo verificare graficamente che $f(0,5) \in [-0,81; -0,80]$; $g(-2,5) \in [1,42; 1,5]$. Quindi $f(0,5) + g(-2,5) \in [0,61; 0,70] \subseteq [0,1]$. Il valore dell'espressione proposta appartiene quindi all'intervallo numero tre.

Il dominio della funzione inversa non contiene $1,5$. Infatti, l'immagine della funzione f, ristretta all'intervallo $[-1; 3]$ per poter essere invertita, è contenuto nell'intervallo $[-5; 1]$.

Problema 2

In figura sono rappresentati i grafici di due funzioni: quello di $y = f(x)$ con linea tratteggiata; quello di $y = g(x)$ con linea continua.



Siano h e k le funzioni inverse di f e g rispettivamente, sull'intervallo $[-1, 1]$. Determinare dal disegno, motivando la risposta, un intervallo, di ampiezza minore di 1 a cui appartiene il valore $f(k(-1)) + h(g(1))$. Determinare dal disegno l'intervallo più grande contenente zero su cui puoi affermare con sicurezza che entrambe le funzioni sono invertibili.

Soluzione. Usando la funzionalità `Trace` della calcolatrice possiamo verificare graficamente che $k(-1) \in [0, 21; 0, 29]$ e che $f(k(-1)) \in [0, 21; 0, 29]$.

Usando la funzionalità `Trace` della calcolatrice possiamo verificare graficamente che $g(1) \in [-0, 16; -0, 17]$ e che $h(g(-1)) \in [-0, 22; -0, 14]$.

Utilizzando l'aritmetica degli intervalli allora, $f(k(-1)) + h(g(-1)) \in [-0, 01; 0.15] \subseteq [-0, 5; 0, 5]$.

Il più grande intervallo contenente 0 su cui entrambe le funzioni sono iniettive è quello che va dal minimo della funzione f, che possiamo ragionevolmente fissare, a partire dal grafico, in -1, al successivo massimo della funzione g, che possiamo fissare in $1, 5$. Nell'intervallo $[-1; 1, 5]$ entrambe le funzioni sono crescenti, quindi iniettive. In realtà il massimo della funzione g è in $\pi/2 = 1, 57...$