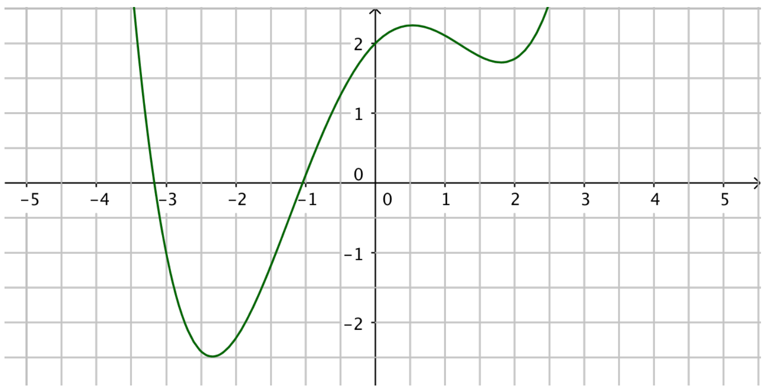
| LICEO MATEMATICO<br>- Palestra Calcolatrici CASIO -<br>**Primo Test** |
|---|
| **Francesco Bologna - Enrico Rogora** |
| **Mirabella, 11 Luglio 2017** |

# Problema 1

In figura è rappresentato il grafico di una certa funzione $y = f(x)$.




Determinare Dominio e Immagine di $f$. Dire, motivando la risposta, se la funzione è iniettiva sull'intervallo $[-3, -1]$. Dire, motivando la risposta, se la funzione $y = f(x-1)$ è iniettiva sull'intervallo $[-1, 1]$. Dire, motivando la risposta, se la funzione $y = f(x) + 3$ è positiva sull'intervallo $[-2, 0]$.

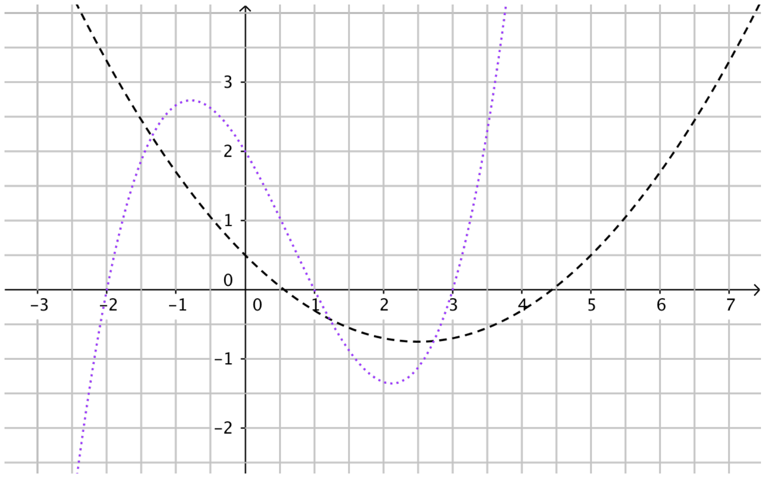
***Soluzione*** La determinazione del dominio e dell'immagine di una funzione definita da un grafico si fa proiettando il grafico sull'asse delle $x$ e su quello delle $y$ rispettivamente. Queste determinazioni sono sempre affette da errore e quindi gli intervalli proposti possono essere sostituiti da intervalli "altrettanto giusti". Per quanto riguarda il dominio, proiettando il grafico sull'asse delle $x$ otteniamo un intervallo $[a; b]$ dove $a$ è poco più grande di $-3,5$ e $b$ appena più piccolo di $2,5$. Approssimativamente possiamo quindi prendere come dominio della funzione l'intervallo $[-3,5; 2,5]$. Per quanto riguarda l'immagine. proiettando sull'asse delle $y$ otteniamo un intervallo $[c; d]$ che, con buona approssimazione possiamo identificare con l'intervallo $[-2,5; 2,5]$.

La funzione non è iniettiva sull'intervallo $[-3; -1]$ perché esistono rette parallele all'asse delle $x$ che intersecano la parte del grafico sopra quell'intervallo in almeno due punti, per esempio la retta $y = -1$.

Il grafico della funzione $f(x-1)$ si ottiene traslando il grafico della funzione assegnata verso destra di una unità, ovvero traslando verso sinistra il sistema di assi cartesiani di una unità. La funzione $f(x-1)$ è quindi iniettiva sull'intervallo $[-1; 1]$ se e solo se la funzione $f$ è iniettiva sull'intervallo $[-2; 0]$ e questo si verifica graficamente in quanto ogni parallela all'asse delle ascisse interseca la porzione del grafico di $f$ sopra l'intervallo $[-2; 0]$ in al più un punto.

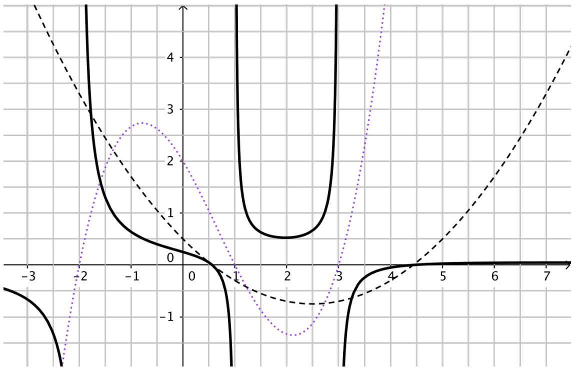
# Problema 2

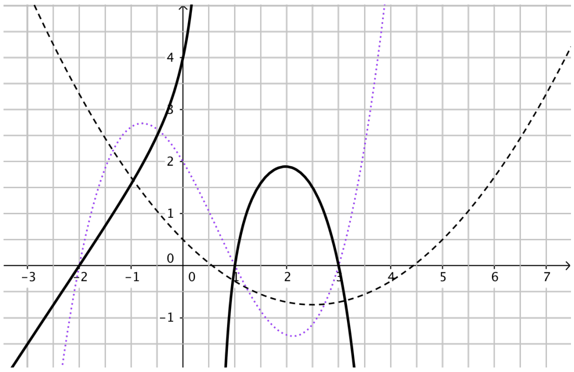
In figura sono rappresentati i grafici di due funzioni: quello di $y = f(x)$ con linea tratteggiata; quello di $y = g(x)$ con linea punteggiata.

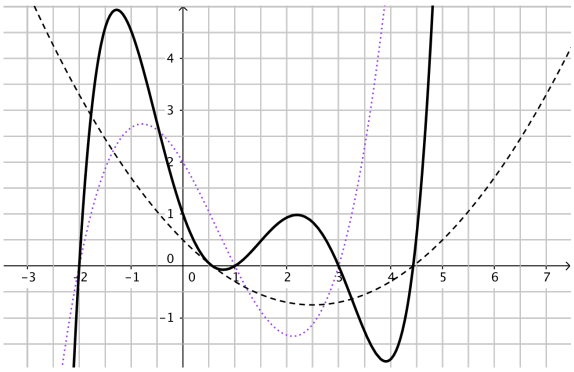


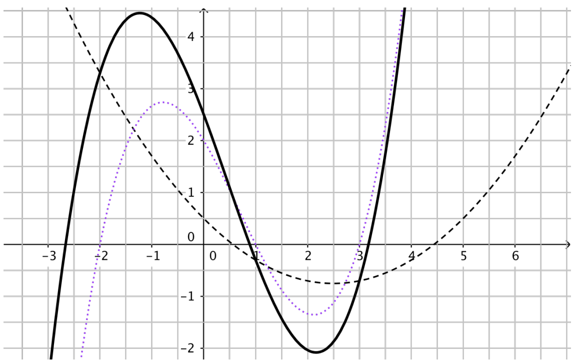

Si scelga, dalle seguenti figure e motivando le risposte, quella in cui è raffigurato con linea continua:

1. il grafico di $f(x) + g(x)$;
2. il grafico di $f(x)/g(x)$;
3. il grafico di $f(x) * g(x)$.


−3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
4 3 2 1 0 −1


−3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
4 3 2 1 0 −1


−3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
4 3 2 1 0 −1


−3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
4 3 2 1 0 −1 −2

**Soluzione** *Una proprietà caratteristica del grafico della somma di due funzioni.* Per tutti i valori che annullano $f(x)$, cioè per tutti i punti di intersezione del grafico tratteggiato, l'ordinata di $g(x)$ coincide con quella di $f(x) + g(x)$ e quindi il grafico punteggiato e quello continuo si intersecano sopra a quei punti di intersezione. Analogamente, per tutti i valori che annullano $g(x)$, cioè per tutti i punti di intersezione del grafico punteggiato, l'ordinata di $f(x)$ coincide con quella di $f(x) + g(x)$ e quindi il grafico tratteggiato e quello continuo si intersecano sopra a quei punti di intersezione. Queste due proprietà sono coerenti solo con il quarto dei grafici proposti.

*Una proprietà caratteristica del grafico del quoziente di due funzioni.* Tutti i valori che annullano $f(x)$ annullano anche $f(x)/g(x)$ e quindi per tutti i punti di intersezione coll'asse delle $x$ del grafico tratteggiato, deve passare anche il grafico continuo. Tutti i valori che annullano $g(x)$ sono fuori dal campo di esistenza di $f(x) * /(x)$ e quindi per tutti i punti di intersezione del grafico punteggiato con l'asse delle $x$, il grafico della funzione continua non è definito (tende all'infinito, se la funzione $g$ non si annulla in quel punto). Queste due caratteristiche sono coerenti solo con il primo dei grafici proposti. (Il secondo dei grafici proposti invece è quello dei $g(x)/f(x)$.

*Una proprietà caratteristica del grafico del prodotto di due funzioni.* Tutti i valori che annullano $f(x)$ annullano anche $f(x) * g(x)$ e quindi per tutti i punti di intersezione con l'asse delle $x$ del grafico tratteggiato deve passare anche il grafico continuo. Analogamente, tutti i valori che annullano $g(x)$ annullano anche $f(x) * g(x)$ e quindi per tutti i punti di intersezione del grafico punteggiato con l'asse delle $x$ deve passare anche il grafico continuo. Queste due caratteristiche sono coerenti solo con il terzo dei grafici proposti.