

1bgo.jpeg

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**TEOREMA DI
VAN DER WAERDEN:
UN' ANALISI
MATEMATICA E PSICOLOGICA**

**Relatore:
Prof.
Enrico Rogora**

**Candidato:
Federico Marcelli
matricola 1654053**

Sessione Autunnale
Anno Accademico 2019-2020
Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo'

A Michela e alla mia Famiglia.

Indice

1	Introduzione	1
2	La scoperta del teorema	2
3	Dimostrazione di Kinchin	12

Capitolo 1

Introduzione

Le dimostrazioni dei teoremi che si leggono sugli articoli o sui libri di testo non raccontano mai l'intero percorso che ha condotto alla scoperta, ma si limitano a presentare una dimostrazione in forma puramente deduttiva, ottimizzando il tempo di esposizione e, per chi ha raggiunto una sufficiente maturità matematica, anche quello di apprendimento.

Il mio lavoro di tesi, è stato quello di studiare un teorema di cui è rimasta traccia precisa del percorso tortuoso che ha portato alla sua dimostrazione. Si tratta del teorema di Van der Waerden relativo all'esistenza di progressioni aritmetiche monocromatiche di lunghezza arbitraria in una colorazione finita qualsiasi dei numeri interi positivi ([3]). Van der Waerden pubblicò la ricostruzione in [5], facilitato dal fatto di aver conservato i disegni utilizzati nelle discussioni con i colleghi Emil Artin e Otto Schreier. Si tratta di un documento unico nel suo genere di cui è stato detto:

Non si tratta solamente di un documento storico di importanza inestimabile. Il saggio offre una rappresentazione vivace dell'invenzione matematica nel suo divenire. Van der Waerden presenta tutte le idee cruciali della dimostrazione nella maniera più chiara e stimolante. [2]

Ho diviso la tesi in due parti per analizzare questi due aspetti: la prima è dedicata alla PSICOLOGIA della scoperta ([4]), che presenta le idee, le perplessità, gli schemi e i "sentimenti" che stanno dietro una scoperta matematica; la seconda è dedicata alla LOGICA della dimostrazione, e contiene una dimostrazione formale del teorema (tratta da [1]).

Capitolo 2

La scoperta del teorema

Nel 1926 Bartel Leendert van der Waerden, Emil Artin e Otto Schreier decisero di unire gli sforzi per cercare di dimostrare una congettura ancora irrisolta, proposta dal matematico olandese Han Baudet, che in quegli anni aveva dato parecchio filo da torcere a molti matematici.

Problema.

Se la sequenza dei numeri interi $1, 2, 3, \dots$ è divisa in due classi, almeno una delle classi contiene, per ogni intero l , una progressione aritmetica di l termini:

$$a, a + b, \dots, a + (l - 1)b$$

“Un giorno, dopo pranzo”, ricorda Van der Waerden “ci recammo nell’ufficio di Artin presso dipartimento di matematica dell’Università di Amburgo, per cercarne una dimostrazione”.

Il caso $l = 2$ è banale. Basta considerare i 3 interi 1,2,3. Se vengono divisi in due classi, una delle classi contiene una coppia di numeri che è ovviamente in progressione aritmetica.

Il caso $l = 3$, era già stato affrontato da Van der Waerden, considerando caso per caso tutte le possibili partizioni in due classi dei numeri interi da 1 a 9 e verificando che è sempre possibile trovare in almeno una di esse una progressione aritmetica di lunghezza 3.

I numeri da 1 a 8, invece possono essere suddivisi, in diversi modi, in due classi, senza che ci sia una progressione aritmetica di 3 termini in nessuna delle due classi, ad esempio

$$1 \quad 2 \quad 5 \quad 6 \quad \textit{nella prima classe}$$

3 4 7 8 *nella seconda classe.*

Questi due semplici casi, risolti guardando a un intervallo finito di numeri interi, (1, 2, 3 per $l = 2$ e 1, 2, ..., 9 per $l = 3$) suggerirono a Schreier di chiedersi se si potesse dimostrare una congettura più forte, se fosse cioè possibile dimostrare che per ogni intero positivo l esiste un numero intero $N(l)$ tale che, per ogni suddivisione del segmento di interi $1, \dots, N(l)$ in due classi, esiste una progressione aritmetica di lunghezza l contenuta in una delle due.

Egli fu anche in grado di dimostrare che la congettura di Baudet implica la congettura forte, usando una procedura ben nota nella teoria degli insiemi, la "procedura diagonale" (cfr. [2] pp. 311-312).

Artin suggerì invece di generalizzare la congettura, considerando suddivisioni in un numero finito qualsiasi di classi. Fu in grado di dimostrare anche che la congettura originale di Baudet, nella forma equivalente di Schreier, implica la forma seguente.

Congettura forte *Per ogni coppia di interi k ed l esiste un intero $w(k, l)$ tale che, per ogni suddivisione del segmento di interi $1, \dots, w(k, l)$ in k classi, in una di queste esiste sempre una progressione aritmetica di lunghezza l .*

Per fare ciò, iniziò a studiare il caso di $k = 4$, l qualsiasi. Si consideri allora il segmento di interi di lunghezza $N(N(l))$. Le 4 classi possono essere raggruppate in 2 e 2. Poiché la congettura è assunta vera per $k = 2$, in una delle due classi più grandi esiste una progressione aritmetica di lunghezza $N(l)$. I termini di questa progressione possono essere enumerati da 1 a $N(l)$. Questi numeri sono divisi nelle due classi più piccole, e quindi ancora, in una delle due classi più piccole, esiste una progressione aritmetica di lunghezza l .

Iterando questo procedimento si dimostra il risultato anche per $k = 8$, partendo dal segmento di interi $1, \dots, N(N(N(l)))$ e, in generale, per $k = 2^n$.

Ovviamente inoltre, se vale il risultato per $k = 2^n$, vale anche per $k \leq 2^n$ perché possiamo sempre aggiungere alcune classi vuote.

Ricapitolando, Artin fu in grado di mostrare che se la congettura di Baudet vale per 2 classi essa vale anche, nella forma di Schreier, per un numero arbitrario di classi.

Artin si aspettava, a ragione, che la generalizzazione da 2 a k classi avrebbe prodotto dei vantaggi in una dimostrazione per induzione. Egli infatti argomentava che si sarebbe potuto provare a dimostrare la congettura per un qualunque valore *fissato* di k e per una lunghezza fissata l sotto l'ipotesi induttiva che la congettura valesse *per tutti i* k e per la lunghezza $l - 1$.

Artin ebbe un'altra idea importante: Se gli interi $1, 2, \dots$ sono divisi in 2 classi, i blocchi di 3 numeri interi successivi vengono automaticamente divisi in $2^3 = 8$ classi. Infatti, ciascuno dei 3 numeri all'interno del blocco può trovarsi nella prima o nella seconda classe, e questo ci dà 8 possibilità per l'intero blocco.

I blocchi di 3 numeri interi successivi possono essere numerati: l' n blocco è quello costituito dai numeri $n, n + 1, n + 2$. Se i blocchi sono partizionati in 8 classi, anche i loro numeri iniziali sono partizionati in 8 classi e a questa partizione si può applicare l'ipotesi induttiva.

In questo modo si ottiene il seguente risultato: tra un numero sufficiente di blocchi successivi si può trovare una progressione aritmetica di $l - 1$ blocchi tutti nella stessa classe. Lo schema di distribuzione di interi nelle due classi nel primo blocco, sarà ripetuto, esattamente com'è, negli altri $l - 2$ blocchi.

Lo stesso vale anche per blocchi di lunghezza arbitraria m , ognuno dei quali consiste di m numeri successivi

$$n, n + 1, \dots, n + m - 1.$$

Il numero delle classi per questi blocchi è 2^m . Ancora, si possono ottenere progressioni aritmetiche di $l - 1$ blocchi nella stessa classe, con ripetizione esatta dello schema del primo blocco. Inoltre, se i blocchi sono abbastanza lunghi, possiamo anche trovare progressioni aritmetiche di $l - 1$ numeri interi all'interno di ciascun blocco.

Nel caso più semplice, $l = 2$, la congettura è certamente vera per tutti i k , perché se i numeri interi da 1 a $k + 1$ sono divisi in k classi, devono esserci due numeri interi in una delle classi per il "principio delle scatole" di Dirichlet.

Arrivati a questo punto i 3 amici affrontarono lo studio del caso $k = 2, l = 3$. Questo, come già detto, era stato risolto da Van der Waerden considerando tutte le possibili partizioni in due classi degli interi da 1 a 9, ma si trattava di trovare un metodo che potesse essere esteso al caso generale, secondo la linea suggerita da Artin, cioè usando l'ipotesi induttiva, k qualsiasi, $l = 2$, che abbiamo appena mostrato essere vera.

Per scambiarsi rapidamente le idee, introdussero un'utile rappresentazione grafica che permetteva di riassumere visivamente le loro osservazioni. Rappresentavano un segmento di interi con un rettangolo, le classi in cui partizionavano gli interi con linee orizzontali, gli interi su cui fissavano la loro attenzione all'interno del segmento con trattini verticali, che risultavano equidistanti quando gli interi considerati erano in progressione aritmetica. Per esempio, rappresentavano tre interi in progressione aritmetica di cui i

primi due in una classe e il terzo nell'altra con il diagramma riportato nella figura 2.2. Questo diagramma rappresenta quindi sia la terna 1,2,3 in un qualsiasi segmento che la contiene (p. e. il segmento $[1,2,3,4,5]$), sia la terna 4,9,13 in un qualsiasi segmento che la contiene, sia infiniti altri casi. Il diagramma ci ricorda anche che, nel primo caso 1 e 2 stanno nella stessa classe mentre 3 sta nell'altra e nel secondo caso che 4 e 9 stanno nella stessa classe mentre 13 sta nell'altra. Gli altri interi che appartengono al segmento non vengono rappresentati se non servono nella dimostrazione. Ogni diagramma corrisponde quindi a infiniti esempi che hanno tutti in comune la struttura codificata nel diagramma relativamente agli interi selezionati.

Per trattare il caso $k = 2$ e $l = 3$ Van der Waerden suggerì di considerare blocchi di 5 numeri interi successivi, divisi in due classi. Nei primi tre dei cinque interi ce ne sono sempre due nella stessa classe (che mettiamo in evidenza con due trattini verticali nel diagramma).¹ Completiamo la progressione aritmetica.² In ogni caso, l'intero che completa la progressione sta dentro il segmento di cinque interi consecutivi. Se sta nella stessa classe dei primi due, abbiamo ottenuto la progressione di lunghezza tre, altrimenti possiamo rappresentare questo intero, insieme ai primi due, con il diagramma seguente.

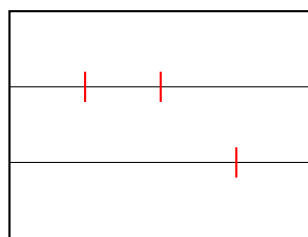


Figura 2.1

Van der Waerden disegnando sulla lavagna questi diagrammi ebbe un'idea. Ci sono $2^5 = 32$ tipi di blocchi di 5 interi successivi partizionati in due classi, quindi prendendo 33 blocchi successivi di 5 interi in sequenza, ci devono essere 2 blocchi dello stesso tipo. Nel primo di questi blocchi esiste uno schema come nella figura 2.2 e nel secondo blocco di 5 lo schema è ripetuto³.

¹Potrebbero essere: il primo e il secondo; il primo e il terzo; il secondo e il terzo.

²Nei tre casi della nota precedente avremmo: il primo, il secondo e il terzo; il primo, il terzo e il quinto, il secondo, il terzo e il quarto.

³In realtà, come abbiamo detto, è ripetuto non solo lo schema, ma addirittura il tipo!

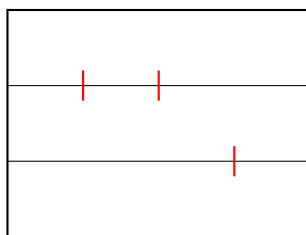


Figura 2.2

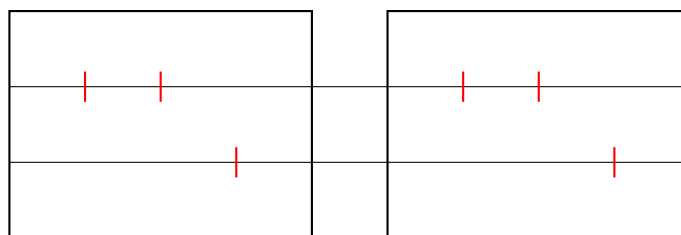


Figura 2.3

Quello che van der Waerden voleva costruire era una progressione di lunghezza 3, quindi disegnò un blocco alla stessa distanza dal secondo blocco come il secondo dal primo, e considerò i tre interi che nel terzo blocco che occupano le stesse posizioni di quelli segnati nel primo e nel secondo blocco, rappresentati in figura 2.4.

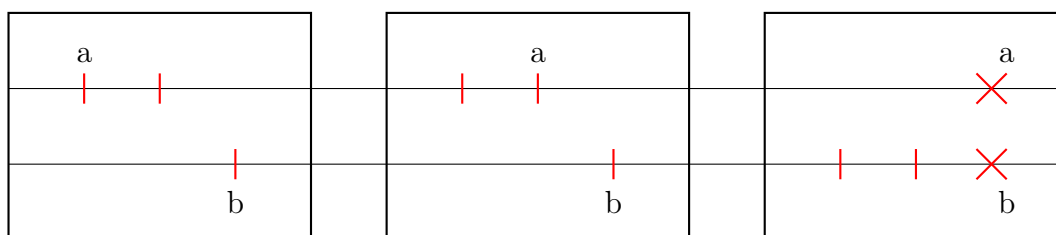


Figura 2.4

Il terzo di questi tratti rappresenta un numero intero, che può essere nella prima o nella seconda classe.

Se è nella prima abbiamo la progressione aritmetica aaa .

Se è nella seconda, abbiamo la progressione aritmetica bbb .

Quindi in ogni caso abbiamo una progressione aritmetica di tre termini nel blocco di numeri interi da 1 a $5 + 32 + 32 = 69$.

Si noti come l'intervallo 1..69 in cui si garantisce, con questo metodo, di trovare una progressione aritmetica di lunghezza 3 in una classe di una

qualsiasi suddivisione dell'intervallo in due classi, non è ottimale, in quanto lo stesso Van der Waerden aveva dimostrato che questo è già possibile nel segmento 1..9.

Dopo aver trovato questa dimostrazione del caso speciale $k = 2$ e $l = 3$ Van der Waerden la spiegò ad Artin e Schreier. Il matematico olandese era sicuro che la stessa dimostrazione avrebbe funzionato nel caso generale, ma Artin e Schreier non ne erano convinti, così Waerden presentò agli altri i dettagli del caso successivo, cioè il caso $k = 3$, $l = 3$.

Invece di considerare blocchi di $3 + 2 = 5$, come fatto precedentemente, considerò blocchi di $4 + 3 = 7$ numeri interi successivi. Poiché i primi 4 numeri del blocco sono distribuiti in 3 classi, due devono appartenere alla stessa classe. Il terzo termine della progressione aritmetica appartiene ancora allo stesso blocco di 7. Se il terzo termine si trova nella stessa classe, abbiamo una progressione di lunghezza 3 nella prima classe di questo blocco. Allora possiamo supporre che il terzo termine sia in un'altra classe.

Otteniamo in ogni blocco di 7, un modello come quello nel primo blocco piccolo.

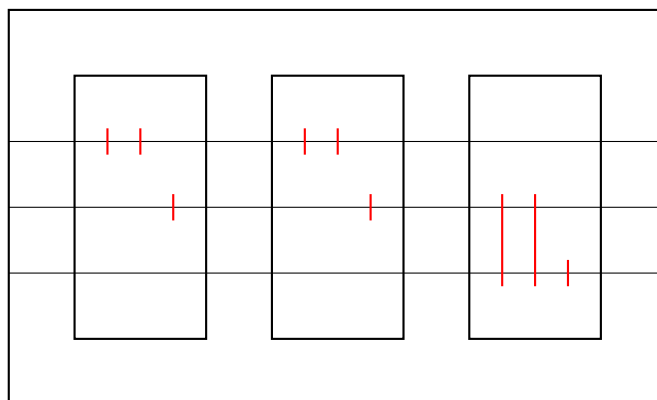


Figura 2.5

I blocchi di lunghezza 7, partizionati in tre classi, sono suddivisi in 3^7 classi. Quindi tra $3^7 + 1$ successivi blocchi di 7 ce ne sono due appartenenti alla stessa classe. Nel primo blocco abbiamo 3 interi in progressione aritmetica, due dei quali appartengono alla stessa classe e questo modello si ripete nel secondo blocco, Se il secondo blocco viene traslato ancora una volta sulla stessa distanza, ci sono 3 blocchi che formano una progressione aritmetica di blocchi, come nella figura precedente.

Nel terzo blocco, Van der Waerden disegnò 3 tratti in posizioni corrispondenti ai 3 tratti nel primo o nel secondo blocco, e considerò le possibilità per il terzo di questi tratti. Se cade nella prima o nella seconda classe, abbiamo una

progressione aritmetica di lunghezza 3 nella stessa classe, per l'argomento visto prima ($k = 2, l = 3$); ma ora il terzo tratto può trovarsi nella terza classe. In questo caso otteniamo lo schema della figura 2.5

Noi abbiamo una tale schema in ogni blocco di $3^7 + 3^7 + 7 = h$ interi successivi. Ora i blocchi di lunghezza h si suddividono in 3^h classi. Quindi tra $3^h + 1$ blocchi successivi di lunghezza h ce ne sono due appartenenti alla stessa classe.

Disegnando i blocchi di lunghezza 7 dentro ai blocchi di lunghezza h , Van der Waerden ottenne il seguente schema.

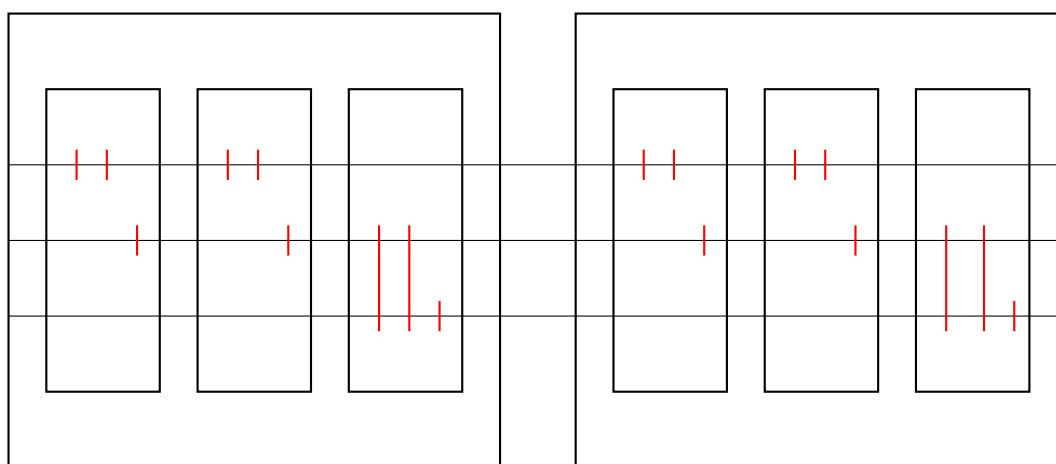


Figura 2.6

Ora traslando il secondo blocco di lunghezza h della stessa distanza, e considerando il terzo tratto nel terzo blocco piccolo, contenuto nel terzo blocco grande, Van der Waerden dimostrò che deve esserci necessariamente una progressione aritmetica di lunghezza tre in una delle classi.

Se questo intero si trova nella prima classe, c'è una progressione aritmetica aaa nella prima classe.

Se si trova nella seconda classe, c'è una progressione aritmetica bbb nella se-

conda classe.

Se si trova nella terza classe, c'è una progressione aritmetica *ccc* nella terza classe.

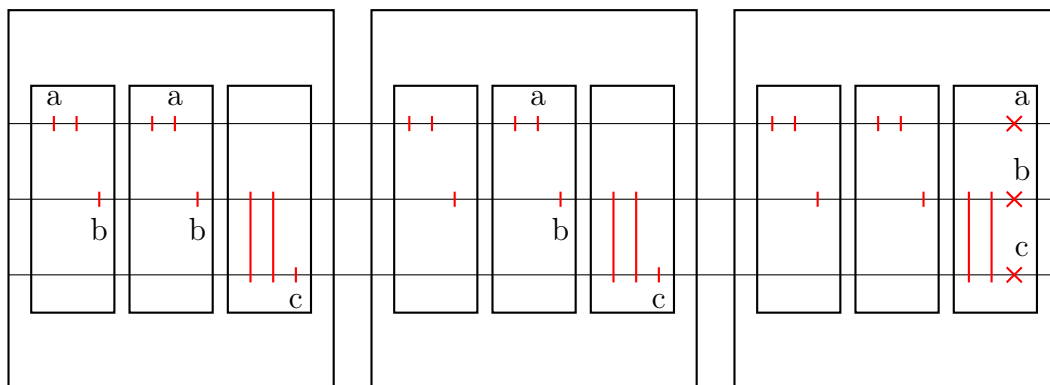


Figura 2.7

Dopo aver discusso questo caso, Van der Waerden, Artin e Schreier furono d'accordo sul fatto che lo stesso tipo di argomento si sarebbe potuto usare per k arbitrario e $l = 3$ e in definitiva per passare da $(2, l)$ a (k, l) .

Tuttavia Artin e Schreier volevano vedere ancora il caso $k = 2, l = 4$ per capire come passare da un l al successivo.

Abbiamo già visto che per un numero sufficientemente grande di numeri interi successivi

(diremo) n esiste una progressione aritmetica di lunghezza $l = 3$. La distanza tra il primo e l'ultimo termine della progressione è $(n - 1)$ al massimo, quindi la differenza fra due termini successivi è $\frac{1}{2}(n - 1)$ al massimo.

Consideriamo ora il quarto termine della stessa progressione.

Tutti e quattro i termini si trovano all'interno di un blocco di

$$g = n + \frac{1}{2}(n - 1)$$

numeri interi successivi. Se il quarto termine appartiene alla stessa classe degli altri tre abbiamo concluso la dimostrazione. Supponiamo che sia nell'altra classe; quindi abbiamo il seguente schema. In ogni blocco di g numeri

interi successivi, deve verificarsi un tale schema. Adesso i blocchi di g sono divisi in 2^g classi.

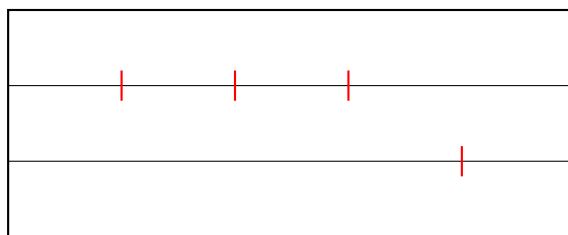


Figura 2.8

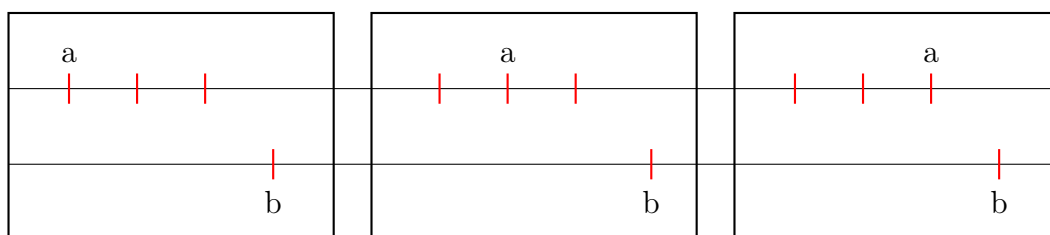


Figura 2.9

Quindi tra $N(3, 2^g)$ blocchi di lunghezza g ci sono tre blocchi in progressione aritmetica appartenenti alla stessa classe.

Aggiungendo un quarto blocco a questa progressione Waerden ottenne facilmente una progressione $aaaa$ nella prima classe oppure $bbbb$ nella seconda. Da questo punto fu chiaro a tutti e tre i colleghi che la prova di induzione da $(l - 1)$ a l funziona per k qualsiasi.

Quindi se la congettura forte di Baudet è vera per $(l - 1)$ e $\forall k$, è vera anche per l e ogni k .

Ora, per Van der Waerden, Artin e Schreier restava solo da mettere insieme le idee per completare la dimostrazione. Ricapitoliamo

1. La prima idea, di Schreier, fu quella che era sufficiente limitarsi ad un segmento finito da 1 a N .
2. La seconda idea fu quella di tentare un'induzione da l a $l - 1$. Era un'idea naturale perché il caso $l = 2$ era ovvio e il caso $l = 3$ si poteva semplicemente risolvere enumerando tutti i casi possibili.
3. Artin dimostrò che se la congettura forte era vera per 2 classi, valeva anche per 4 classi. Nella sua dimostrazione era implicita un'altra idea:

se la congettura è vera per un segmento di interi da 1 a N è vera anche per ogni progressione aritmetica di lunghezza N . Basta rinumerare i termini della progressione da 1 a N . Pur nella sua semplicità questa idea è fondamentale per la dimostrazione.

4. L'idea successiva, anche questa dovuta ad Artin, è che è sempre vantaggioso avere un'ipotesi induttiva forte da cui cominciare. Perciò cominciamo con l'assunzione che la congettura valga per le progressioni di lunghezza $(l-1)$ e *per tutti i valori di k* e cerchiamo di dimostrare la congettura per le progressioni di lunghezza l e per *un valore particolare di k* , diciamo $k = 2$. A questo punto il piano generale d'attacco era pronto.
5. Sempre Artin ebbe un'altra idea decisiva. Possiamo applicare l'ipotesi di induzione non solo ai singoli interi, ma anche ai blocchi, che possono essere loro stessi divisi in classi. In questa maniera possiamo essere sicuri che gli interi blocchi siano ripetuti $l-1$ volte.
6. A questo punto risultava del tutto naturale considerare progressioni di $l-1$ interi all'interno dei blocchi, e provare ad estendere queste progressioni di lunghezza $l-1$ a progressioni di lunghezza l . Il primo caso non banale era $l = 3$, che Van der Waerden trattò nella maniera che abbiamo visto.
7. I due blocchi contenenti ognuno progressioni aritmetiche monocromatiche di lunghezza 2 non permettono ancora di trovare progressioni monocromatiche di lunghezza 3. Bisogna ancora aggiungere un blocco.

Ora come dice Waerden stesso, lui si sentiva certo di essere arrivato ad una dimostrazione valida ed efficace dopo aver trattato i tre casi che abbiamo descritto. Era sicuro che la dimostrazione per un arbitrario l e k avrebbe funzionato.

“È stato come cogliere le mele da un albero. Se si è raccolta una mela e un'altra sta un poco più in alto, può accadere che ci si possa rendere pienamente conto che basta un piccolo sforzo per cogliere anche quella”

Capitolo 3

Teorema di Van der Waerden: dimostrazione di Kinchin

Kinchin, nell'estate del 1928, si trovò a trascorrere alcune settimane a Gottinga. Là venne a conoscenza di un problema, posto da Baudet, che teneva occupati tutti i matematici di zona.

Problema.

Immagina che l'insieme di tutti i numeri naturali sia diviso in qualsiasi modo in due parti.

Si può quindi affermare che una progressione aritmetica di lunghezza arbitraria può essere trovata in almeno una di queste parti?

Sempre nell'estate del 1928 un giovane olandese, andato a Gottinga a studiare, trovò una soluzione al problema. Questo ragazzo che Kinchin conobbe direttamente era Van der Waerden.

Kinchin imparò la soluzione del problema direttamente da Van der Waerden, giudicandola elementare ma non semplice. Grazie alla collaborazione di M.A. Lukomskaya, Kinchin pubblicò una dimostrazione più semplice e trasparente del teorema di Van der Waerden.

Teorema di Van der Waerden.

Dati due interi positivi k ed l , esiste un numero naturale, $n(k, l)$, tale che, comunque si divida un segmento di interi positivi di lunghezza $n(k, l)$ in k classi, allora esiste una progressione aritmetica di lunghezza l in almeno una di queste classi.¹

Osservazione.

Il teorema è banalmente vero per k qualsiasi e per $l = 2$: per il principio delle scatole di Dirichlet, basta porre $n(k, 2) = k + 1$. Infatti, se abbiamo $k + 1$ oggetti suddivisi in k classi, allora certamente almeno una di queste classi contiene almeno due oggetti. Una coppia di numeri a, b è sempre in progressione aritmetica $(a + j \cdot (b - a))$, e ciò dimostra l'asserto.

Dimostrazione.

Dimostreremo questo teorema usando l'induzione su l , assumendo come base induttiva $l = 2$; più precisamente, dimostriamo il teorema per $k, l + 1$ assumendo di aver dimostrato l'esistenza di $n(k, l)$ per ogni k .

Definiamo

$$q_0 = 1, \quad n_0 = n(k, l)$$

Quindi definiamo q_s e n_s nel seguente modo:

$$q_s = 2n_{s-1}q_{s-1} \quad e \quad n_s = n(k^{q_s}, l) \quad (3.1)$$

Fissati l e k , numeri q_s e n_s sono definiti induttivamente per $s \geq 0$.

Vogliamo dimostrare che per $n(k, l + 1)$ possiamo prendere il numero q_k . D'ora in avanti poniamo $l + 1 = l'$ per brevità. Supponiamo che il segmento Δ , di lunghezza q_k , sia diviso in k classi. Diremo che due numeri a e b di Δ sono dello stesso tipo,

$$a \approx b$$

se a e b appartengono alla stessa classe.

Diremo che due sotto-segmenti di Δ della stessa lunghezza,

$$\delta = (a, a + 1, \dots, a + r), \quad \delta' = (a', a' + 1, \dots, a' + r)$$

sono dello stesso tipo, e scriveremo $\delta \approx \delta'$

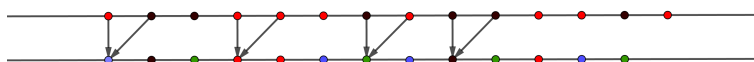
$$\text{se } a \approx a' \quad a + 1 \approx a' + 1 \quad \dots \quad a + r \approx a' + r.$$

Il numero di diversi tipi (colori) possibili per i numeri del segmento Δ è ovviamente uguale a k .

¹Un modo equivalente per esprimere il contenuto del teorema è: comunque si colorino gli interi di un segmento di lunghezza $n(k, l)$ con k colori, esiste una progressione aritmetica monocromatica di lunghezza l .

Per i segmenti di lunghezza 2, quindi $(a, a + 1)$, il numero di possibili tipi (relativamente alle distribuzioni degli interi nelle k classi) è k^2 ; in generale per i segmenti di lunghezza m sono possibili k^m tipi distinti.

Usando il linguaggio delle colorazioni, possiamo quindi dire che una colorazione degli interi di un segmento con k colori induce una colorazione dei sottosegmenti di lunghezza due in 2^k , ecc. Una colorazione dei sottosegmenti di data lunghezza in h classi induce a sua volta una colorazione degli interi in h classi, assumendo come colore di un intero, quello del segmento di data lunghezza che comincia con quell'intero. Illustriamo il procedimento con un esempio. relativo alle colorazioni con due colori (rosso e nero) e dove la colorazione indotta sulle coppie adiacenti è la seguente: rosso + rosso=rosso; rosso + nero=blu, nero + rosso=verde, nero + nero=nero.



Poiché $q_k = 2n_{k-1}q_{k-1}$ il segmento Δ può essere considerato come una sequenza di $2n_{k-1}$ sotto-segmenti di lunghezza q_{k-1} .

Tali segmenti possono avere $k^{q_{k-1}}$ tipi differenti (colorazioni indotte dalle k colorazioni di partenza).

Dividiamo il segmento Δ a metà, ogni metà conterrà n_{k-1} sotto-segmenti. Ricordiamo che $n_{k-1} = n(k^{q_{k-1}}, l)$.

Per il significato del numero $n_{k-1} = n(k^{q_{k-1}}, l)$ possiamo affermare che la metà di sinistra del segmento Δ contiene una progressione aritmetica di l di questi sotto-segmenti dello stesso tipo (monocromatici)

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$$

tutti di lunghezza q_{k-1} .

Per brevità diremo che segmenti con la stessa lunghezza Δ_i formano una progressione aritmetica se i loro numeri iniziali formano tale progressione. Chiamiamo la differenza tra i numeri iniziali d_1 di due segmenti vicini della progressione $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$.

Naturalmente la differenza tra i secondi (terzi, quarti, ...) numeri di due segmenti vicini è uguale a d_1 .

A questa progressione di l segmenti aggiungiamo il successivo $(l + 1)$ -esimo termine Δ_{l+1} , che potrebbe già proiettarsi oltre il limite della metà sinistra del segmento Δ , ma in ogni caso appartiene ancora interamente a Δ .



I segmenti $\Delta_1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l, \Delta_{l'}$ formano una progressione aritmetica di lunghezza l' e differenza d_1 , di segmenti di lunghezza q_{k-1} . Non possiamo assumere nulla sul tipo (sul colore) del segmento $\Delta_{l'}$.

Prendiamo un arbitrario termine Δ_{i_1} tra i primi l della progressione di segmenti appena costruiti. Δ_{i_1} ha lunghezza q_{k-1} con $1 \leq i_1 \leq l$.

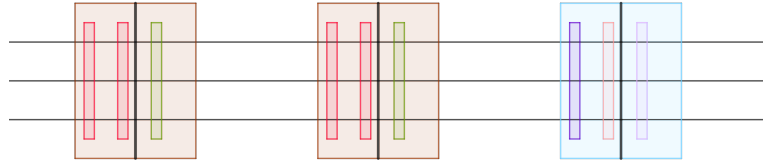
Ripetiamo gli stessi passi al segmento Δ applicati questa volta a Δ_{i_1} .

Allora dalla lunghezza $q_{k-1} = 2n_{k-2}q_{k-2}$ di Δ_{i_1} , posso considerare la parte di sinistra di Δ_{i_1} come una sequenza di n_{k-2} sotto-segmenti di lunghezza q_{k-2} . Per i sotto-segmenti di questa lunghezza ci sono $k^{q_{k-2}}$ tipi possibili, e d'altra parte $n_{k-2} = n(k^{q_{k-2}}, l)$.

Pertanto la metà sinistra di Δ_{i_1} deve contenere una progressione di l di questi sotto-segmenti dello stesso tipo $\Delta_{i_1 i_2}$ di lunghezza q_{k-2} con $1 \leq i_2 \leq l$.

Sia d_2 la differenza di questa progressione.

A tale progressione di segmenti aggiungiamo $(l + 1) - \text{esimo}$ termine sul cui tipo non sappiamo niente. Come precedentemente detto questo termine non deve per forza essere contenuto nella metà di sinistra, ma sicuramente appartiene al segmento Δ_{i_1} .



Estendiamo questa costruzione, applicata per ora ad un solo segmento, trasladola agli altri segmenti Δ_{i_1} $1 \leq i_1 \leq l'$. Otterremo una serie di segmenti $\Delta_{i_1 i_2}$ con $1 \leq i_1, i_2 \leq l'$. È chiaro che due segmenti arbitrari di questo genere con indici non superiori a l sono dello stesso tipo

$$\Delta_{i_1 i_2} \approx \Delta_{i'_1 i'_2} \quad 1 \leq i_1, i_2, i'_1, i'_2 \leq l$$

Iterando tale procedimento k volte otteniamo dei segmenti lunghi $q_0 = 1$ che non sono altro che numeri appartenenti al segmento originale Δ .

Tuttavia rappresentiamo anche questi numeri impiegando la stessa notazione che abbiamo utilizzato precedentemente per denotare gli intervalli:

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k} \quad 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq l'$$



Per $1 \leq s \leq k$ e $1 \leq i_1, \dots, i_s, i'_1, \dots, i'_s \leq l$ abbiamo

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_s} \approx \Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s} \quad (3.2)$$

Prima di proseguire con la dimostrazione facciamo due osservazioni.

Osservazione (1).

In $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_s} \approx \Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}$ se $s < k$ e se $i_{s+1}, i_{s+2}, \dots, i_k$ sono indici arbitrari presi nella sequenza $1, 2, \dots, l, l'$ allora i numeri $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1} \dots i_k}$ appaiono nella stessa posizione nel segmento $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_s}$ come del resto $\Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s i_{s+1} \dots i_k}$ appare in $\Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s}$. Da questi due segmenti che non dello stesso tipo grazie a 3.2, allora

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1} \dots i_k} \approx \Delta_{i'_1 i'_2 \dots i'_s i_{s+1} \dots i_k} \quad (3.3)$$

se $1 \leq i_1, \dots, i_s, i'_1, \dots, i'_s \leq l$ e $1 \leq i_{s+1}, \dots, i_k \leq l'$ ($1 \leq s \leq k$)²

Osservazione (2).

Per $s \leq k$ e $i'_s = i_s + 1$ $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s}$ e $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s}$ sono ovviamente segmenti adiacenti nell' s -esimo step della costruzione.

Perciò, per l'arbitrarietà degli indici i_{s+1}, \dots, i_k i numeri

$\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_k}$ e $\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s i_{s+1} \dots i_k}$

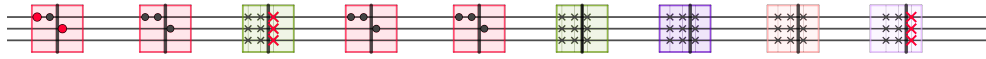
appaiono nella stessa posizione in due segmenti vicini, quindi $i'_s = i_s + 1$.

$$\Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i'_s i_{s+1} \dots i_k} - \Delta_{i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_k} = d_s \quad (3.4)$$

Torniamo alla dimostrazione e consideriamo i seguenti $k + 1$ numeri di Δ

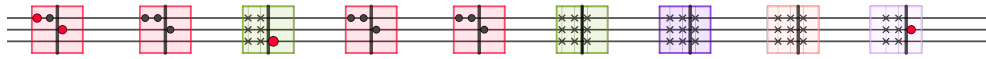
²si noti che, la seconda serie di indici può attivare fino a l' . Nella seconda figura quindi, non solo i quattro blocchi nella posizione uno e due dei due blocchi marroni sono dello stesso tipo, ma anche i due blocchi nella posizione tre dei due blocchi marroni, sono dello stesso tipo e, nella terza figura, non soltanto gli otto numeri nelle posizioni 1 e 2 dei blocchi rossi sono nella stessa classe, ma anche i quattro numeri in posizione 3 dei blocchi rossi sono nella stessa classe.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \Delta_{\underbrace{l'l' \dots l'}_k} \\ a_1 = \Delta_{\underbrace{1l' \dots l'}_{k-1}} \\ a_2 = \Delta_{\underbrace{11l' \dots l'}_{k-2}} \\ \vdots \\ a_k = \Delta_{11\dots 1} \end{array} \right. \quad (3.5)$$



Dal momento che il segmento Δ è stato diviso in k classi, e noi abbiamo $k + 1$ numeri in 3.5 allora ci sono due di questi numeri che appartengono alla stessa classe. Facciamo che questi numeri siano a_r e a_s ($r < s$) quindi

$$\Delta_{\underbrace{1 \dots 1}_{r} \underbrace{l' \dots l'}_{k-r}} \approx \Delta_{\underbrace{1 \dots 1}_{s} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s}} \quad (3.6)$$

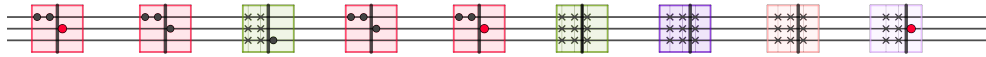


Consideriamo gli $l + 1$ numeri

$$c_i = \Delta_{\underbrace{1 \dots 1}_{r} \underbrace{i \dots i}_{s-r} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s}} \quad (3.7)$$

i primi l numeri di questo gruppo ($i < l'$) appartengono alla stessa classe per 3.3.

L'ultimo $i = l'$ tuttavia è della stessa classe del primo grazie a 3.6.



Di conseguenza tutti gli $l + 1$ numeri in 3.7 sono della stessa classe, e per dimostrare la nostra tesi dobbiamo solamente far vedere che questi numeri formano una progressione aritmetica, ovvero

$$c_{i+1} - c_i \quad i \leq i \leq l$$

non dipende dal parametro i . Poniamo ulteriormente $i + 1 = i'$ e

$$c_{i,m} = \Delta \underbrace{1 \dots 1}_r \underbrace{i' \dots i'}_m \underbrace{i \dots i}_{s-r-m} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s} \quad 0 \leq m \leq s - r$$

così che

$$c_{i,0} = c_i \qquad c_{i,s-r} = c_{i+1}$$

e quindi

$$c_{i+1} - c_i = \sum_{m=1}^{s-r} (c_{i,m} - c_{i,m-1})$$

Per 3.4 abbiamo

$$c_{i,m} - c_{i,m-1} = \Delta \underbrace{1 \dots 1}_r \underbrace{i' \dots i'}_m \underbrace{i \dots i}_{s-r-m} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s} - \Delta \underbrace{1 \dots 1}_r \underbrace{i' \dots i'}_{m+1} \underbrace{i \dots i}_{s-r-m-1} \underbrace{l' \dots l'}_{k-s}$$

allora la differenza

$$c_{i+1} - c_i = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_s$$

ed è infatti indipendente da i .

Questo completa la dimostrazione.

□

Bibliografia

- [1] KINCHIN A.Y. - *Three pearls of number theory*, Graylock press, Rochester, 1952.
- [2] SOIFER A. - *The mathematical coloring book*, Springer, New York, 2009.
- [3] VAN DER WAERDEN B. L. - “Beweis einer Baudetschen Vermutung”. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 15 (1927), 212–216.
- [4] VAN DER WAERDEN B. L. - *Einfall und Überlegung: Drei Kleine Beiträge zur Psychologie des Mathematischen Denkens*, Birkhäuser, Basel, 1954
- [5] VAN DER WAERDEN B. L. - “How the proof of Baudet’s conjecture was found”. In MIRSKY L. (ED.), *Studies in Pure Mathematics*, Academic Press, London, 1971, 251–260.