Test di preparazione all'esame. Attenzione a non confonedere il coefficiente binomiale

$$\binom{n}{m}$$

con la frazione

$$\frac{n}{m}.$$

I coefficiente binomiale si può calcolare come

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}.$$

Q1 Lanciando una moneta non truccata 5 volte, nell'ipotesi che i lanci siano indipendenti, qual è la probabilità che escano esattamente 3 teste?

- 32/10
- 10/32 [*]
- 1/32
- 3/32
- 32/3

Soluzione Si usa la distribuzione binomiale, che assegna a tale evento la probabilità

$$\frac{1}{2^5}\binom{5}{3} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

Q2 Un arciere tira ad un bersaglio. Assumendo che la probabilità di fare centro sia pari a 1/20 e che colpire il bersaglio ad un certo tiro sia indipendente dal fatto che il bersaglio sia centrato o meno ad un qualsiasi altro tiro della serie in considerazione, la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta in trenta tiri è:

- 3/2
- 1
- 2/3
- 1/20

- Nessuna delle altre risposte è esatta [*]

Soluzione Gli eventi «colpire al primo lancio», «colpire al secondo lancio», …, «colpire al secondo lancio», non sono disgiunti, in quanto è ben possibile colpire sia a un lancio che a un altro. Questo non permette di calcolare la probabilità dell'evento unione facendo la somma delle probabilità. Tra l'altro, se così facessimo, cioè se calcolassimo

$$p(E_1 \cup \cdots \cup E_{30}) = p(E_1) + \cdots + p(E_{30}) = 30 \cdot \frac{1}{20},$$

la probabilità verrebbe maggiore di uno, cosa manifestamente assurda.

Conviene considerare l'evento complementare W, cioè che l'arciere non colpisca mai in trenta lanci. Questo evento è intersezione degli eventi W_i «l'arciere non colpisce il bersaglio all'i-esimo lancio». Per l'ipotesi di indipendenza allora, poiché la probabilità che l'arciere non colpisca il bersaglio al primo lancio (o a uno qualsiasi dei successivi) è $1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$, la probabilità di W è

$$p(W) = p(W_1 \cap \cdots \cap W_{30}) = \left(\frac{19}{20}\right)^{30}$$

e quindi la probabilità richiesta è

$$p(W^c) = 1 - p(W) = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{30} = 0.785\ldots$$

Q3 Condizionando un evento di probabilità p è possibile che la sua probabilità raddoppi?

- VERO [*]
- FALSO

Soluzione Basta fare un esempio. Supponiamo, nel lancio di una moneta non truccata, che l'evento in considerazione sia E=«esce testa» e che l'evento rispetto a cui condizioniamo sia esso stesso. Allora,

$$p(E|E) = \frac{p(E \cap E)}{p(E)} = \frac{p(E)}{p(E)} = 1,$$

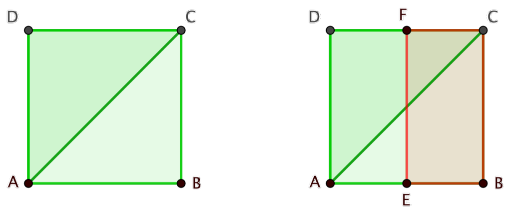
mentre $p(E) = 1/2$.

Q4 Condizionando un evento di probabilità p è possibile che la sua probabilità dimezzi?

- VERO [*]
- FALSO

Soluzione Basta fare un esempio. Si consideri un quadrato ABCD. Supponiamo di avere un meccanismo che lancia una pallina in maniera tale che la probabilità che la pallina cada dentro una figura contenuta nel quadrato sia uguale all'area della figura diviso per l'area del quadrato (che possiamo assumere unitaria).

Sia H l'evento: ≪la pallina cade nel triangolo ACD≫ e sia G l'evento ≪la pallina cade nel rettangolo EBCF≫. Allora, $p(H) = \frac{1}{2}$ e $p(H|G) = 1/4$.



Q5 La probabilità $P(A|B)$ di un evento A condizionato a B è uguale a

- $P(A \cap B)/P(A)$
- $P(A \cap B)/P(B)$ [*]
- $P(A \cap B)/P(A \cup B)$
- $P(A \cup B)/P(A \cap B)$
- $P(A \cup B)/(P(A) \cdot P(B))$.

Soluzione Per definizione.

Q6 Nella ripetizione di un certo numero di esperimenti, si aggregano i conteggi relativi ai risultati in tre classi. Nella prima classe si osservano 13 conteggi, mentre il numero aspettato è 18. Nella seconda si osservano 21 conteggi, quando il numero aspettato è ancora 18 e nella terza classe si osservano 20 conteggi (il numero aspettato è sempre 18). Il valore della discrepanza, ovvero del chi quadro è

- 10/18

- 38/18 [*]
- 1161/455
- 571/910
- 37/65

Soluzione Applicando la formula, il valore del chi quadro è:

$$(13-18)^2/18+(21-18)^2/18+(20-18)^2/18 = 38/18 = 19/9$$

Q7 Due eventi A e B si dicono (stocasticamente) indipendenti se

- $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ [*]
- $p(A \cap B) = p(A) + p(B)$
- $p(A \cap B) = p(A \cup B)$

Soluzione Due eventi A e B sono indipendenti se $p(A|B) = p(A)$. Ma $p(A|B) = p(A \cap B)/p(B)$ e quindi

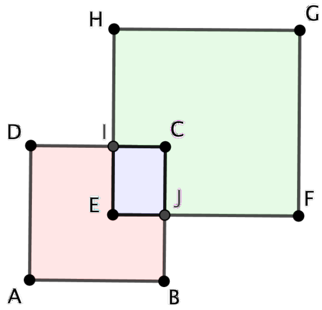
$$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

da cui la tesi.

Q8 Se A e B sono due eventi si ha sempre

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ [*]
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) + p(A \cap B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(A \cap B)$
- $p(A \cup B) = p(B) + p(A \cap B)$

Soluzione È possibile decomporre l'unione arbitraria di due insiemi in parti disgiunte nella seguente maniera (cfr. figura)



$$A \cup B = (A - A \cap B) \cup A \cap B \cup \boxed{(B - A \cap B)}.$$

Essendo l'unione disgiunta,

$$p(A \cup B) = p(A - A \cap B) + p(A \cap B) + p\boxed{(B - A \cap B)}.$$

Sommando e sottraendo $p(A \cap B)$ abbiamo

$$p(A \cup B) = (p(A - A \cap B) + p(A \cap B)) + (p\boxed{(B - A \cap B)} + p(A \cap B)) - p(A \cap B).$$

e quindi, per il teorema della probabilità della somma di eventi disgiunti

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Q9 Un dado viene lanciato due volte. La probabilità che venga entrambe le volte un numero pari è

- 1/2
- 1/4 [*]
- 1/36
- 9
- 18

Soluzione Gli *esiti favorevoli* sono nove:

$$\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

Gli *esiti possibili* sono 36 e quindi la probabilità è $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Q10 Un dado viene lanciato due volte. Sia A l'evento ≪Esce un numero pari in almeno uno dei due lanci≫; B l'evento ≪Esce un numero dispari in almeno uno dei due lanci≫; C l'evento ≪Esce un numero pari al primo lancio≫; D l'evento ≪Esce un numero dispari al secondo lancio≫; Quali delle seguenti coppie di eventi sono indipendenti?

- Solo le coppie (A,B) e (C,D)
- Solo la coppia (A,B)
- Solo (C,D)
- Solo la coppia (B,C)
- Nessuna delle altre risposte è esatta [*]

Soluzione Svolgiamo questo esercizio valutando la probabilità dei diversi eventi a partire dal conteggio degli esiti favorevoli. Gli esiti possibili sono

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6)\\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6)\\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6)\\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6)\\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Gli esiti favorevoli al verificarsi dell'evento A sono

$$A = \begin{array}{cccccc}
(1,1) & {\color{red}(1,2)} & (1,3) & {\color{red}(1,4)} & (1,5) & {\color{red}(1,6)}\\
{\color{red}(2,1)} & {\color{red}(2,2)} & {\color{red}(2,3)} & {\color{red}(2,4)} & {\color{red}(2,5)} & {\color{red}(2,6)}\\
(3,1) & {\color{red}(3,2)} & (3,3) & {\color{red}(3,4)} & (3,5) & {\color{red}(3,6)}\\
{\color{red}(4,1)} & {\color{red}(4,2)} & {\color{red}(4,3)} & {\color{red}(4,4)} & {\color{red}(4,5)} & {\color{red}(4,6)}\\
(5,1) & {\color{red}(5,2)} & (5,3) & {\color{red}(5,4)} & (5,5) & {\color{red}(5,6)}\\
{\color{red}(6,1)} & {\color{red}(6,2)} & {\color{red}(6,3)} & {\color{red}(6,4)} & {\color{red}(6,5)} & {\color{red}(6,6)}
\end{array}$$

da cui segue che $p(A) = \frac{27}{36}$.

Gli esiti favorevoli al verificarsi dell'evento B sono

$$B = \begin{array}{cccccc}
{\color{blue}(1,1)} & {\color{blue}(1,2)} & {\color{blue}(1,3)} & {\color{blue}(1,4)} & {\color{blue}(1,5)} & {\color{blue}(1,6)}\\
{\color{blue}(2,1)} & (2,2) & {\color{blue}(2,3)} & (2,4) & {\color{blue}(2,5)} & (2,6)\\
{\color{blue}(3,1)} & {\color{blue}(3,2)} & {\color{blue}(3,3)} & {\color{blue}(3,4)} & {\color{blue}(3,5)} & {\color{blue}(3,6)}\\
{\color{blue}(4,1)} & (4,2) & {\color{blue}(4,3)} & (4,4) & {\color{blue}(4,5)} & (4,6)\\
{\color{blue}(5,1)} & {\color{blue}(5,2)} & {\color{blue}(5,3)} & {\color{blue}(5,4)} & {\color{blue}(5,5)} & {\color{blue}(5,6)}\\
{\color{blue}(6,1)} & (6,2) & {\color{blue}(6,3)} & (6,4) & {\color{blue}(6,5)} & (6,6)
\end{array}$$

da cui segue che $p(B) = \frac{27}{36}$.

Gli esiti favorevoli al verificarsi dell'evento C sono

$$\begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array}$$

da cui segue che $p(C) = \frac{18}{36}$.

Gli esiti favorevoli al verificarsi dell'evento D sono

$$\begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array}$$

da cui segue che $p(D) = \frac{18}{36}$.

Poiché $A \cap B$ contiene 18 elementi (le coppie rosse e blue), $p(A \cap B) = \frac{18}{36}$, mentre $p(A) \cdot p(B) = 27/36 \cdot 27/36 = \frac{18}{32}$, quindi gli eventi A e B non sono indipendenti.

Analogamente si verifica che C e D non sono indipendenti.

Per quanto riguarda B e C, l'intersezione contiene 9 elementi, quindi la probabilità $p(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Poiché $p(B) \cdot p(C) = 18/36 \cdot 27/36 = 3/8$, neanche B e C sono indipendenti.

Q11 Il servizio metereologico dice che la probabilità che piova Sabato è del 25% e che la probabilità che piova domenica è del 25%. La probabilità che piova nel weekend è quindi del 50%.

- VERO
- FALSO [*]

Soluzione I dati non determinano la probabilità richiesta. Infatti, detta A la probabilità che piova il sabato e B quella che piova la domenica, la probabilità richiesta è quella dell'evento $A \cup B$, che è

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Non essendo determinata la probabilità che piova sia il sabato che la domenica, i dati permettono solo di concludere che tale probabilità è minore o uguale al 50%. Se possiamo assumere che i due eventi sono indipendenti, allora la probabilità richiesta sarebbe $1/4 + 1/4 - 1/16 = 7/16$.

Q12 Le prime tre cifre del telefono degli uffici di una certa azienda è 452. Se tutte le successioni delle rimanenti 4 cifre sono ugualmente probabili, qual è la probabilità che un numero di telefono estratto a caso tra quelli dell'azienda contenga sette cifre distinte?

- 0.084 [*]
- 0.504
- 0.250
- 0.240
- Nessuna delle altre risposte è esatta

Per costruire un numero come richiesto, dobbiamo scegliere 4 cifre. I modi possibili per scegliere 4 cifre sono 10^4. Quelli che producono un numero come richiesto, la prima cifra può essere scelta in 7 modi, la seconda in 6, la terza in 5, la quarta in 4. Quindi la probabilità è $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10^4} = 0.084$.

Q13 Estraendo cinque carte da un mazzo di 52, quante diverse combinazioni si possono ottenere?

- $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$
- 52^5
- $\frac{52^5}{5!}$
- $\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!}$ [*]
- Nessuna delle altre risposte è esatta

Soluzione Due estrazioni che differiscono solo nell'ordine di estrazione sono da considerarsi combinazioni uguali. Quindi il numero delle combinazione si calcola con il coefficiente binomiale

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = (2.598.960)$$

Q14 Quante diverse portate posso preparare selezionando il primo piatto da 4 possibili preparazioni, il secondo da 6 e il contorno da 3?

- $4! \cdot 6! \cdot 3!$
- $4 \cdot 6 \cdot 3$ [*]
- $\frac{4! \cdot 6! \cdot 3!}{3!}$
- $\frac{4 \cdot 6 \cdot 3}{3!}$
- Nessuna delle altre è esatta

Soluzione Praticamente per definizione (se indichiamo con X l'insieme dei primi, con Y quello dei secondi e con Z quello dei contorni, le possibili scelte sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $X \times Y \times Z$ e il numero degli elementi di un prodotto di insiemi è il prodotto degli elementi di ogni singolo fattore).

Q15 Una moneta non truccata viene lanciata 5 volte. Qual è la probabilità di ottenere una successione di tre teste?

- 8/32
- 1/32
- 10/32 [*]
- 18/32
- Nessuna delle altre risposte è corretta

Soluzione Il problema è trattato in generale negli appunti. La formula risolutiva è:

$$\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Q16 Un giocatore di poker ha ricevuto tre quadri e due cuori. Scarta i due cuori e pesca due carte. Qual è la probabilità, giocando con un mazzo di 52 carte, che peschi altri due quadri?

- $\left(\frac{10}{47}\right)^2$
- $\frac{10 \cdot 9}{47 \cdot 46}$ [*]
- $\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{1}{47 \cdot 46}$

- $\frac{10^2}{47 \cdot 46}$
- $\frac{10 \cdot 9}{47^2}$

Soluzione Le successive due estrazioni vengono fatte da un mazzo di $52-5=47$ carte, che contiene $13-3=10$ carte di quadri. La probabilità che la prima carta pescata sia di quadri è $\frac{10}{47}$. La probabilità che la seconda carta pescata sia anch'essa di quadri è $\frac{9}{46}$, quindi la probabilità che le prime due siano di quadri è $\frac{10 \cdot 9}{47 \cdot 46}$.

Q17 Qual è il coefficiente numerico di x^3y^4 nell'espansione di $(x+y)^7$?

- 35 [*]
- 20
- 12
- 48
- Nessuna delle altre risposte è corretta

Soluzione Sviluppando $(x+y)^7$ si ottengono i prodotti di 7 termini ottenuti da tutte le possibili sequenze di 7 elementi scelti da x e da y. Per esempio, $xyyxyxy$ e $xxyyyyx$. Le successioni contenenti 3 x e 4 y sono $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$.

Q18 Una moneta non truccata viene lanciata tre volte. Qual è la probabilità di ottenere due o più teste sapendo che è uscita almeno una testa?

- 1/4
- 1/2
- 4/7 [*]
- 3/7
- Nessuna delle altre risposte è corretta

Soluzione Svolgiamo l'esercizio in due maniere, cominciando con l'usare le idee della probabilità condizionata.

Indichiamo con E_i l'evento ≪Escono esattamente i teste≫. Come spiegato negli appunti del corso, $p(E_i) = \binom{3}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Sia E l'evento ≪Escono almeno due teste≫. Poiché $E = E_2 \cup E_3$ e poiché l'unione è disgiunta,

$$p(E) = p(E_2) + p(E_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right) = \frac{1}{8}(3+1) = \frac{4}{8}.$$

Sia F l'evento ≪Esce almeno una testa≫. Poiché $F = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ e poiché l'unione è disgiunta,

$$p(F) = p(E_1)+p(E_2)+p(E_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right) = \frac{1}{8}(3+3+1) = \frac{7}{8}.$$

La probabilità che vogliamo calcolare è $p(E|F)$. Per definizione di probabilità condizionata

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{p(E)}{p(F)} = \frac{4}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{4}{7}.$$

dove si è usato il fatto che $E \subseteq F$ e quindi $E \cap F = E$:

Alternativamente, i casi possibili, nell'ipotesi che esca almeno una testa, sono 7:

$$TCC, \color{red}{TCT}, \color{red}{TTC}, \color{red}{TTT}, \color{red}{CTT}, CTC, CCT$$

I casi favorevoli, indicati in rosso, sono 4 e quindi, essendo i casi equiprobabili, la probabilità cercata è $\frac{4}{7}$.

Q19 Una moneta non truccata viene lanciata tre volte. Qual è la probabilità di ottenere due o più teste sapendo che è uscita almeno una croce?

- 1/4
- 1/2
- 4/7
- 3/7 [*]
- Nessuna delle altre risposte è esatta

Anche questa volta svolgiamo l'esercizio in due maniere, cominciando con l'usare le idee della probabilità condizionata.

Indichiamo con E_i l'evento ≪Escono esattamente i teste≫ e sia E l'evento ≪Escono almeno due teste≫. Come per l'esercizio precedente, $E = E_2 \cup E_3$ e

$$p(E) = \frac{4}{8}.$$

Sia F l'evento «Esce almeno una croce». Poiché $F = E_0 \cup E_1 \cup E_2$ e poiché l'unione è disgiunta,

$$p(F) = p(E_0)+p(E_1)+p(E_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right) = \frac{1}{8}(1+3+3) = \frac{7}{8}.$$

La probabilità che vogliamo calcolare è $p(E|F)$. Per definizione di probabilità condizionata

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{p(E_2)}{p(F)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{3}{7}.$$

dove si è usato il fatto che $E = E_2 \cup E_3$, $F = E_0 \cup E_1 \cup E_2$ e quindi $E \cap F = E_2$:

Alternativamente, i casi possibili, nell'ipotesi che esca almeno una croce, sono 7:

$$TCC, TCT, TTC, CTT, CTC, CCT, CCC$$

I casi favorevoli, indicati in rosso, sono 3 e quindi, essendo i casi equiprobabili, la probabilità cercata è $\frac{3}{7}$.

Q20 Si lanciano due dadi e la somma delle facce è 6. Qual è la probabilità che almeno con uno dei dadi sia uscito tre?

- 2/5
- 7/5
- 5/36
- 1/5 [*]
- Nessuna delle altre risposte è esatta

Soluzione Nell'ipotesi che la somma delle facce sia uguale a 6, i casi possibili sono

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1).$$

Di questi, che sono tutti equiprobabili, solo 1 è favorevole, da cui segue che la probabilità cercata è 1/5.

Q21 Si lanciano due dadi e la somma delle facce è minore di 6. Qual è la probabilità che almeno con uno dei dadi sia uscito tre?

- 2/5 [*]
- 7/5
- 1/10
- 1/5
- Nessuna delle altre risposte è esatta

Soluzione Nell'ipotesi che la somma delle facce sia minore di 6, i casi possibili sono 10, quelli favorevoli sono 4 e quindi la probabilità è $4/10 = 2/5$.

Q22 Una coppia ha due figli. Qual è la probabilità che siano entrambe ragazze sapendo che la più anziana è una ragazza?

- 1/2 [*]
- 1/4
- 3/4
- 2/3
- Nessuna delle altre risposte è esatta

Soluzione Assumiamo che il sesso del figlio sia un processo stocastico indistinguibile dal lancio di una moneta non truccata. Nell'ipotesi che la più anziana sia una ragazza, i casi possibili sono MF (primo maschio, seconda femmina) e FF. Il caso favorevole è FF. Essendo per ipotesi i casi equiprobabili, la probabilità di avere entrambe femmine è 1/2.

Q23 Una coppia ha due figli. Qual è la probabilità che siano entrambe ragazze sapendo che una delle due è una ragazza?

- 1/2
- 1/4
- 3/4
- 2/3

- Nessuna delle altre risposte è esatta [*]

Soluzione Assumiamo che il sesso del figlio sia un processo stocastico indistinguibile dal lancio di una moneta non truccata. Nell'ipotesi che almeno una sia una ragazza, i casi possibili sono MF (primo maschio, seconda femmina), FM e FF. Il caso favorevole è FF. Essendo per ipotesi i casi equiprobabili, la probabilità di avere entrambe femmine è 1/3.

Q24 Supponiamo che la probabilità di vivere più di 70 anni sia pari a 0.6 e quella di vivere più di 80 sia pari a 0.2. Se una persona festeggia il suo 70-esimo compleanno qual è la probabilità che festeggi anche il suo 80-esimo compleanno?

- 1/5
- 1/4
- $\boxed{1/3}$ [*]
- 1/2
- Nessuna delle altre risposte è esatta

Soluzione Sia E l'evento ≪Vivere più di 70 anni≫ e sia F l'evento ≪Vivere più di 80 anni≫. Poiché $F \subseteq E$, $F \cap E = F$. Quindi,

$$p(F|E) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{p(F)}{p(E)} = \frac{0.2}{\boxed{0.6}} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Q25 Se A e B sono indipendenti allora A^c (il complementare di A) e B^c (il complementare di B) sono indipendenti.

- VERO [*]
- FALSO

Soluzione

$$p(A^c \cap B^c) = p((A \cup B)^c) = 1 - p(A \cup B) = 1 - (p(A) + p(B) - p(A \cap B))$$

poiché A e B sono assunti indipendenti, l'ultima espressione è uguale a

$$1 - (p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)) = (1 - p(A))(1 - p(B)) = p(A^c) \cdot p(B^c)$$

e quindi

$$p(A^c \cap B^c) = p(A^c) \cdot p(B^c)$$

e gli eventi sono indipendenti.