Probabilità

Enrico Rogora

Master – Università di Roma

6 Marzo 2018

Incertezza

Condizione abituale: incertezza.

- Domani pioverà?
- Sta piovendo a Nairobi?
- In che anno morirà l'attuale segretario dei DS?
- In che anno è morto Napoleone Bonaparte?
- Cosa succede se premo il tasto 2 sulla calcolatrice?
- Cosa succede se premo il tasto π sulla calcolatrice?
- Cosa succede se premo il tasto `ALEA` sulla calcolatrice?

Oggetti aleatori

Aleatorio significa *incerto* (per Te) ma di per sè *ben determinato*.

- Eventi
- Numeri
- Funzioni o processi
- Enti

Caso limite dell'incertezza, evento/numero/processo/ente *pleonastico*.

Eventi aleatori come particolari numeri aleatori

Un evento è un fatto preciso, qualificato da una proposizione logica, che può essere vera o falsa. Si dice aleatorio se non abbiamo necessariamente conoscenza completa del suo verificarsi.
Esempi: Domani pioverà? Sta piovendo a Nairobi? È piovuto ieri a Nantukett? Premendo il tasto Alea della calcolatrice, il numero che esce è maggiore di 0.5
Ad ogni evento aleatorio si puòÚ associare il corrispondente *numero aleatorio caratteristico* che vale 1 se l'evento si verifica e zero altrimenti.
Esempio: realizzare programmino con la calcolatrice per calcolare il numero caratteristico dell'ultimo evento proposto; analogo con una tabella di numeri casuali.

Operazioni logiche su eventi I

La *congiunzione logica* di due eventi A e B, che si indica $A \wedge B$ e si legge "A e B" si verifica quando si verificano sia A che B. Se a e b sono i numeri aleatori caratteristici di A e B rispettivamente, allora il numero aleatorio caratteristico di $A \wedge B$, è $a \wedge b = \min(a, b) = a \cdot b$. È spesso conveniente rappresentare due eventi con due insiemi. La loro congiunzione logica corrisponde allora all'intersezione $A \cap B$ dei due insiemi associati (che continuiamo a indicare con le stesse lettere dei corrispondenti eventi).
La *disgiunzione logica* di due eventi A e B, che si indica $A \vee B$ e si legge "A o B" si verifica quando si verifica A, oppure B, o entrambi. Se a e b sono i numeri aleatori caratteristici di A e B rispettivamente, allora il numero aleatorio caratteristico di

Operazioni logiche su eventi II

$A \vee B$, è $a \vee b = \max(a, b)$. Nell'interpretazione insiemistica, alla disgiunzione logica corrisponde l'unione $A \cup B$.
La *negazione logica* di un evento A, che si indica $\neg A$ e si legge "non A" si verifica quando non verifica A. Se a è il numero aleatorio caratteristici di A, allora il numero aleatorio caratteristico di $\neg A$, è $1 - a$. Nell'interpretazione insiemistica, alla negazione logica corrisponde il complemento A^c

Vero, falso e vettore caratteristico I

L'evento *vero*, indicato Ω è caratterizzato dall'essere sempre vero. Il suo numero aleatorio caratteristico, che indichiamo $\mathbf{1}$, vale sempre 1. La sua interpretazione insiemistica è l'insieme di cui tutti gli eventi che stiamo considerando sono sottoinsiemi.
L'evento *falso*, indicato $\emptyset$ è caratterizzato dall'essere sempre falso. Il suo numero aleatorio caratteristico, che indichiamo $\mathbf{0}$, vale sempre 0. La sua interpretazione insiemistica è l'insieme vuoto.
Ad n eventi aleatori $E_1, \ldots E_n$ è associato il *vettore aleatorio caratteristico*, un vettore di numeri aleatori che ha al posto i-esimo il numero caratteristico dell'eventi i-esimo, che vale 1 se l'i-esimo evento è vero, 0 altrimenti.
Per esempio, se lanciamo una moneta 4 volte e indichiamo con E_i l'evento"esce testa all'i-esimo lancio", il vettore $(0, 1, 1, 0)$

Vero, falso e vettore caratteristico II

indica che al primo lancio è uscita croce, al secondo e al terzo è uscita testa e al quarto lancio è uscita croce.

Eventi aleatori logicamente incompatibili

Due eventi aleatori A e B si dicono logicamente incompatibili quando a loro congiunzione logica è l'evento impossibile $\emptyset$, ovvero $a + b \leq 1$.
Per esempio, in una particolare lancio di una moneta, "esce testa" e "esce croce" sono eventi logicamente incompatibili.
Analogamente, n eventi aleatori $A_1, \ldots, A_n$ si dicono logicamente incompatibili quando sono logicamente compatibili a coppie, ovvero, con riferimento ai numeri aleatori caratteristici (numeri indicatori) a_i, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 1$. Si osservi che, la condizione caratteristica di una n-pla di eventi incompatibili si può anche esprimere richiedendo che la somma aritmetica coincida con il max dei numeri caratteristici.
Dal punto di vista insiemistico, eventi incompatibili si possono rappresentare come sottoinsiemi disgiunti.

Eventi aleatori esaustivi

n eventi $A_1, \ldots, A_n$ si dicono *esaustivi* se almeno uno di essi *deve necessariamente accadere*, ovvero, con riferimento ai numeri caratteristici $a_1, \ldots, a_n$ degli eventi, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 1$.
Dal punto di vista insiemistico, eventi esaustivi danno una *copertura* dell'insieme $\mathcal{Q}$, cioè la loro unione coincide con $\mathcal{Q}$.
Eventi esaustivi tendono a non essere indipendenti. Se sono contemporaneamente incompatibili ed esaustivi danno un ricoprimento di $\mathcal{Q}$ fatto da sottoinsiemi disgiunti, ovvero una *partizione* di $\mathcal{Q}$.
La partizione associata agli eventi $E_1, \ldots, E_n$ è quella costituita dagli eventi $E_1' \wedge \cdots \wedge E_n'$ (che possono anche talvolta coincidere con l'evento impossibile, dove E_i' è l'evento E_i o la sua negazione (tra questi c'è anche l'evento $\neg E_1 \wedge \cdots \wedge \neg E_n$).

Eventi aleatori logicamente indipendenti I

Due eventi aleatori A e B si dicono logicamente indipendenti quando la conoscenza dell'uno nulla dice sull'altro. In altre parole, se A è vero, B può essere vero o falso. Se A è falso, B può essere vero o falso.

Esempi di eventi logicamente indipendenti, relativi al lancio ripetuto di una moneta, sono "Esce testa al primo lancio" e "Esce testa al secondo lancio".

Esempi di eventi logicamente dipendenti, sempre nello stesso contesto, sono "Esce testa al primo lancio" e "Esce croce al primo lancio".

In maniera compatta e facilmente generalizzabile, nessuna delle coppie (A, B), $(\neg A, B)$, $(A, \neg B)$, $(\neg A, \neg B)$, che si ottengono sviluppando $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$, è incompatibile.

Eventi aleatori logicamente indipendenti II

n eventi aleatori $A_1, \ldots A_n$ si dicono logicamente indipendenti quando nessuna delle n-ple che si ottengono sviluppando $(A_1 \vee \neg A_1) \wedge \cdots \wedge (A_n \vee \neg A_n)$ è incompatibile.

Dagli eventi ai numeri aleatori

Operazioni logiche su eventi aleatori si possono generalizzare a operazioni aritmetiche su numeri aleatori.

- Numeri aleatori si possono dire logicamente incompatibili se il loro prodotto è zero (ha senso??).
- Numeri aleatori $X_1, \ldots, X_n$ si dicono logicamente indipendenti se tutti i possibili valori $X_1 = x_{1,i_1}, X_2 = x_{2,i_2}, \ldots, X_n = x_{n,i_n}$ si possono osservare. Per esempio, se X è un numero aleatorio qualsiasi, X e X^2 non sono indipendenti in quanto si possono osservare solo coppie di valori del tipo del tipo (i, i^2).

La partizione associata a due numeri aleatori (????), è data dagli eventi $E(i_1, \ldots, i_n)$ descritti dalle condizioni $X_1 = x_{1,i_1}, X_2 = x_{2,i_2}, \ldots, X_n = x_{n,i_n}$. Alcuni di questi eventi risultano impossibili se e solo se i numeri sono logicamente dipendenti.

Numeri aleatori: valori possibili

- Misure: $a < X < b$
- Conteggi: $X \in \{x_1, \ldots, x_n\}$

Aritmetica delle misure

- $a < X < b$, $c < Y < d$, $a + c < X + Y < b + d$
- $a < X < b$, $c < Y < d$, $a - d < X + Y < b - c$
- $0 < a < X < b$, $0 < c < Y < d$, $a \cdot c < X \cdot Y < b \cdot d$
- $0 < a < X < b$, $0 < c < Y < d$, $a/d < X/Y < b/d$

Esercizio 1

Sia X un numero aleatorio, $3 < X < 4$. Sia Y un numero aleatorio, $1 < Y < 2$. Sia $Z = \frac{X^2 - 2Y}{X+Y}$. Allora

- $5/6 < Z < 7/2$ [*]
- $7/4 < Z < 2$
- $7/6 < Z < 3$
- $5/7 < Z < 7/6$
- $7/4 < Z < 13/6$

Esercizi

- Determinare se i seguenti eventi sono logicamente incompatibili
- Determinare se i seguenti eventi sono logicamente indipendenti
- Determinare se i seguenti numeri sono logicamente incompatibili
- Determinare se i seguenti numeri sono logicamente indipendenti

Probabilità

Problema: distribuire una massa su un insieme di eventi:

- su una partizione;
- per indipendenza.

Introduzione alla probabilità I

Per introdurre il **calcolo delle probabilità** cominciamo con il **fenomeno aleatorio** più semplice: il lancio di una moneta. Bisogna distinguere tra un **prima** (di conoscere l'esito del lancio) da un **dopo**. È chiaro che questa differenza è relativa: **io** posso conoscere l'esito ma **tu** no. Assumeremo sempre che io e te si abbia la stessa conoscenza relativa al fenomeno aleatorio di cui si sta parlando e useremo il **noi** per riferirci a tutti coloro che condividono questa conoscenza.

Dopo

Siamo nel campo del **certo**. L'esito è **Testa** oppure **Croce**.

Introduzione alla probabilità II

Prima

Siamo nel campo dell'**incerto**, ma la nostra ignoranza non è completa. Sappiamo che sono possibili due soli esiti. Inoltre, se non abbiamo motivo di dubitare che la moneta sia contraffatta, condividiamo l'aspettativa che entrambi gli esiti siano **equiprobabili**.

La probabilità I

La probabilità di un **evento aleatorio** ovvero di un evento possibile e di cui non si ha necessariamente una conoscenza completa, come l'evento **esce testa** nel lancio di una moneta, è un numero che quantifica la nostra fiducia nel suo verificarsi. Più il numero è grande, maggiore è la nostra fiducia. Un **evento certo** ha probabilità 1. Un **evento impossibile** ha probabilità 0.
La **definizione classica** definisce come **probabilità di un evento** il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili. Per esempio, la probabilità di estrarre un asso da un mazzo di 40 carte è 4 (numero di casi favorevoli) diviso 40 (numero di casi possibili).
La **definizione frequentista** definisce come probabilità di un evento il limite delle frequenze relative di osservazione dell'evento in **ripetizioni identiche di un esperimento**, al tendere all'infinito del numero delle osservazioni. Secondo questo approccio anche eventi

La probabilità II

non impossibili possono avere probabilità zero e anche eventi non certi possono avere probabilità 1.

La **definizione soggettivista** definisce come probabilità di un evento il costo di una **scommessa equa** sul verificarsi dell'evento, per cui la vincita paghi 1. Secondo questo approccio è possibile assegnare una probabilità anche a eventi non ripetibili.

La definizione frequentista: un esempio I

Quando asseriamo che **un certo tiratore ha probabilità pari al 92% di colpire il bersaglio**, intendiamo dire che su 100 colpi sparati in certe e ben definite condizioni (per esempio, il bersaglio posto a una determinata distanza, la stessa arma utilizzata, ecc.), ci sono circa 92 successi (e quindi circa 8 errori) **in media**. Non intendiamo che ci saranno esattamente 92 successi ogni 100 colpi; alle volte ce ne saranno 93, altre 94; altre volte il numero dei successi potrà anche essere notevolmente più grande di 92, altre volte notevolmente più piccolo; ma **nella media**, dopo un **grande numero di ripetizioni** di colpi sparati **nelle stesse condizioni** la percentuale dei colpi andati a segno resterà la stessa, purché con il passare del tempo nessun **cambiamento essenziale** abbia luogo nelle condizioni di sparo. (Per esempio, il tiratore potrebbe aumentare le sue capacità e aumentare la sua percentuale di centri al 95%). L'**esperienza** mostra che per un tale tiratore, il numero di centri su 100 colpi sarà vicino a 92; quelle

La definizione frequentista: un esempio II

serie di 100 colpi per cui il il numero dei successi è inferiore a 88 o superiore a 96, sebbene possano capitare, capiteranno raramente.
Il numero 92% che serve come indice della bravura di un tiratore è di norma **molto stabile**; cioè la percentuale dei bersagli colpiti nella maggioranza dei tiri (**nelle stesse condizioni**) sarà quasi sempre **circa** lo stesso, deviando **significativamente** dal suo valor medio solo in casi rari.

Gnedenko - Kinchin *An el. intro to the theory of prob.*

Problema I

Un tiratore ha l'80% di probabilità di colpire un bersaglio. Un secondo tiratore, nelle stesse condizioni del primo, ha il 70% di probabilità di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che il bersaglio sia colpito quando entrambi i tiratori sparano contemporaneamente? Assumiamo che siano sparati 100 colpi simultanei. Il bersaglio sarà centrato dal primo tiratore approssimativamente 80 volte. Le rimanenti 20 volte, in cui il primo tiratore manca il bersaglio, ci aspettiamo che il secondo tiratore sia in grado di colpirlo 14 volte, il che porta il totale a 94 e quindi la probabilità richiesta è 94% (qui si usa l'ipotesi, ben fondata in questo esempio, che le probabilità di colpire il bersaglio da parte di uno dei tiratori non sia influenzata dall'altro e quindi che, per il secondo tiratore, i venti tiri colpi mancati dal primo siano **tiri normali**, in cui la probabilità di colpire il bersaglio continui ad essere del 70%).

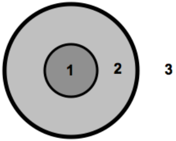
In questo semplice problema si tratta di **calcolare la probabilità di eventi complicati a partire dalla probabilità di eventi più**

Problema II

semplici. Lo scopo del **calcolo delle probabilità** è quello di stabilire regole generali che permettano di automatizzare il più possibile questo genere di calcoli. Come in molte altre parti della matematica è possibile ed utile partire introducendo **enti primitivi** e **assiomi** e dedurre da questi le regole generali del calcolo.

Un esempio importante I

Supponiamo che un tiratore debba colpire un bersaglio diviso in due zone, come in figura



La prima zona, il centro del bersaglio, è indicato con 1, la seconda, la corona circolare colorata, è indicata con 2, e abbiamo riservato il numero 3 per indicare l'esterno del bersaglio. Supponiamo, dopo aver osservato numerose serie di colpi, che **mediamente**, il tiratore colpisca la zona 1 62 volte, la zona 2 31 e non colpisca il bersaglio 7 volte. Consideriamo i tre eventi aleatori: **il tiratore colpisce la zona** 1 **del bersaglio**, che indicheremo E_1; **il tiratore colpisce la zona** 2 **del bersaglio**, che indicheremo E_2; **il tiratore non colpisce il**

Un esempio importante II

bersaglio, che indicheremo E_3. La nostra aspettativa sull'esito di un lancio si può dunque quantificare ponendo

$$p(E_1) = 0.62 \qquad p(E_2) = 0.31, \qquad p(E_3) = 0.7.$$

Eventi incompatibili

Gli eventi E_i sono **(statisticamente) incompatibili**, cioè, per ogni coppia di eventi estratti dai tre la probabilità che accadano entrambi è nulla, in quanto non è possibile che un tiratore colpisca contemporaneamente due delle zone disgiunte.
In generale, n eventi $E_1, \dots, E_n$ si dicono statisticamente incompatibili se $p(E_i \wedge E_j) \neq 0$ implica $i = j$.

La regola dell'addizione per eventi incompatibili

La regola più semplice e più importante per il calcolo delle probabilità, uno degli assiomi della teoria assiomatica è la **regola dell' addizione per eventi incompatibili**.
Illustriamola con l'esempio già considerato del tiratore.
Consideriamo l'evento **il tiratore colpisce il bersaglio,** che indicheremo E. È chiaro che **si verifica l'evento** E quando **si verifica l'evento** E_1 **o si verifica l'evento** E_2.
Poichè i due eventi sono **incompatibili** non possono verificarsi contemporaneamente e ci aspettiamo quindi che su 100 tiri **in media**, il tiratore colpisca il bersaglio $62 + 31 = 93$ volte.
Possiamo analogamente misurare la nostra aspettazione del verificarsi della somma logica di due eventi **incompatibili** qualsiasi A e B, ponendo

$$\boxed{p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B)}.$$

Cautela I

È facile commettere errori grossolani quando si parla di probabilità se non se ne conoscono le basi teoriche. Una porzione significativa di questi errori riguarda l'**errata applicazione della regola di addizione per eventi incompatibili**. Ecco un esempio. Un articolo apparso nel *Los Angeles Times* (24 Agosto, 1987) discuteva il rischio statistico

Cautela II

dell'AIDS in questi termini:

> *Numersi studi condotti sui partner sessuali di persone infettate con il virus responsabile dell'AIDS mostrano che un singolo rapporto vaginale non protetto comporta un rischio estremamente basso di infettare un partner non infetto, forse compreso tra* 1 *su* 100 *e* 1 *su* 1000*. In media consideriamo che il rischio sia di* 1 *su* 500*.* 100 *rapporti non protetti con un partner infetto accrescono il rischio di infezione ad* 1 *su* 5*. Statisticamente,* 500 *rapporti non protetti con un partner infetto o* 100 *rapporti con* 5 *partner portano al* 100% *di probabilità di infezione (statisticamente, non necessariamente in realtà)*

Discussione dell'esempio I

Seguendo questo ragionamento, 1000 rapporti non protetti con un partner infetto condurrebbero ad una probabilità di infezione uguale a 2. Per trovare l'errore in questo ragionamento che porta ad una conclusione manifestamente assurda, consideriamo il caso di due rapporti. A_1 denoti l'evento **il virus si trasmette con il primo rapporto** e con A_2 l'evento **il virus si trasmette con il secondo rapporto**. I due eventi non sono incompatibili in quanto il virus può trasmettersi sia con il primo che con il secondo rapporto. Allora per calcolare la probabilità dell'evento **l'infezione si trasmette con il primo o con il secondo rapporto** non possiamo usare la regola di addizione per eventi incompatibili cioè, quando gli eventi non sono incompatibili $p(A_1 \ o \ A_2) \neq p(A_1) + p(A_2)$. Vale infatti una regola di addizione più generale, valida per coppie di eventi qualsiasi, che asserisce

$$p(A_1 \ o \ A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \ e \ A_2).$$

Discussione dell'esempio II

Quindi, quando si valuta la probabilità di un evento composto A_1 *o* A_2 non si può trascurare il contributo dell'evento A_1 *e* A_2, che ha probabilità nulla **solo per eventi incompatibili**.

Punto di vista assiomatico I

È possibile e conveniente formalizzare l'idea di **misurare la fiducia**, ovvero di **assegnare la probabilità** all' esito possibile di un esperimento, di una misurazione, o di una osservazione (Kolmogorov, 1933).
Senza entrare nel dettaglio di specificare la procedura attraverso cui si giunge all'assegnazione esplicita delle probabilità, l'approccio assiomatico si occupa di stabilire gli enti fondamentali del calcolo delle probabilità (eventi aleatori e misura di probabilità) e di specificare gli assiomi che gli enti fondamentali devono verificare, in maniera analoga a quanto si fa può fare per la geometria e per l'aritmetica.
I concetti fondamentali per la teoria assiomatica della probabilità sono quelli di **evento aleatorio**, che formalizza il **possibile risultato** di un esperimento, di una misurazione o di

Punto di vista assiomatico II

una osservazione e di **misura di probabilità**, che formalizza l'idea di fiducia nel verificarsi di un evento aleatorio.

Assiomi I

- Gli eventi aleatori o semplicemente **eventi** sono sottoinsiemi di uno spazio Ω detto **spazio dei campioni** e formano una σ-algebra $\mathcal{F}$, cioè: $\Omega \in \mathcal{F}$; se $A \in \mathcal{F}$ allora $A^c \in \mathcal{F}$; l'unione $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ di ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi $A_i \in \mathcal{F}$ è ancora un elemento di $\mathcal{F}$.
- ad ogni evento $A \in \mathcal{F}$ è assegnanto un numero reale non negativo $P(A)$ detto **probabilità** dell'evento A.
- $P(\Omega) = 1$.
- **Regola per l'addizione per eventi disgiunti, (o incompatibili).** Se due elementi A e B di $\mathcal{F}$ sono **disgiunti**, ovvero se $A \cap B = \emptyset$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Assiomi II

- Se $\{A_n\}_{n=1,2,\dots,\infty}$ è una **successione decrescente di eventi**, (cioè $A_{n+1} \subset A_n$ per ogni $n = 1, 2, \dots, \infty$) e $\bigcap A_n = \emptyset$), allora $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

La terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ si dice **spazio di probabilità**.

Esempi di spazi di probabilità I

- Lancio di una moneta: spazio campionario, $\Omega = \{T, C\}$; σ algebra degli eventi, $\mathcal{F}$ uguale alla famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω; esempio di evento: **esce testa** $= \{T\}$; si definisce una probabilità ponendo $p(\emptyset) = 0$, $p(\{T\}) = p$, $p(\{C\}) = 1 - p$, $p(\Omega) = 1$, con $0 \leq p \leq 1$.
- Lancio ripetuto tre volte di una moneta: spazio campionario, $\Omega = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\}$; σ algebra degli eventi, $\mathcal{F}$ uguale alla famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω; esempio di evento: **escono almeno due teste**$= \{TTC, TCT, CTT, TTT\}$; si definisce una probabilità ponendo $p(E) = |E|/8$, dove $|E|$ indica il numero di elementi in E. Per esempio, la probabilità che escano almeno due teste è $p(\{TTC, TCT, CTT, TTT\}) = 4/8 = 1/2$.

Esempi di spazi di probabilità II

- Estrazione di una carta da un mazzo di 40 carte: spazio campionario; $\Omega = \{A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit, \dots, K\spadesuit\}$; σ algebra degli eventi, $\mathcal{F}$ uguale alla famiglia di tutti i sottoinsiemi di Ω; esempio di evento: **esce una figura di cuori** $= \{J\heartsuit, Q\heartsuit, K\heartsuit\}$; si definisce una probabilità ponendo $p(E) = |E|/40$. Per esempio, la probabilità che esca una figura di cuori è $p(\{J\heartsuit, Q\heartsuit, K\heartsuit\}) = 3/40$.

Spazi di probabilità discreti I

La teoria della probabilità per spazi campionari finiti e numerabili è più semplice che nel caso generale. Alcuni parti degli assiomi sono automaticamente verificati. In particolare possiamo sempre assumere che la famiglia $\mathcal{F}$ degli eventi coincida con la famiglia $\mathcal{P}(\Omega)$ di **tutti i sottoinsiemi di** Ω. Poichè ogni sottoinsieme è in questi due casi unione al più numerabile dei suoi punti, la probabilità in un insieme finito o numerabile (per brevità un insieme **discreto**) è completamente determinata dal suo valore sugli insiemi costituiti da un singolo elemento (**eventi elementari**). Quando lo spazio degli eventi non è discreto, per esempio quando $\Omega = \mathbb{R}$, questo non è più vero.

Spazi di probabilità discreti II

Spazi di probabilità finiti

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- $P(\omega_i) = p_i$ con $p_i \geq 0$ e $p_1 + \cdots + p_n = 1$. In generale, se $E = \{\omega_{j_1}, \dots \omega_{j_k}\}$, $P(E) = p_{j_1} + \cdots + p_{j_k}$. $\{p_1, \dots, p_n\}$ si dice **distribuzione di probabilità** su Ω.

Spazi di probabilità discreti III

[

allowframebreaks]Spazi di probabilità numerabili

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- $P(\omega_i) = p_i$ con $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. In generale, se $E = \{\omega_{j_i}\}_{i \in I}$, $P(E) = \sum_{i \in I} p_{j_i}$. $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ si dice **distribuzione di probabilità** su Ω.

Esempio I

Spazio di probabilità classico su un insieme finito

Lo **spazio di probabilità classico** su un insieme finito Ω è la terna $(\Omega, P(\Omega), P)$ con P la **probabilità uniforme** che assegna ad ogni $E \in P(\Omega)$ la frazione di elementi di E, cioè $|E|/|\Omega|$.

Calcoliamo la probabiltà che estraendo una carta dal mazzo esca un fante o una figura di cuori. Lo spazio di probabilità adeguato al problema è costituito dai simboli delle 40 carte e la probabilità è quella uniforme che assegna ad ogni carta la stessa probabilità di essere estratta. Questa ipotesi è giustificata assumendo che il mazzo venga ben mescolato prima di ogni estrazione. Sia $A = \{J\heartsuit, J\diamondsuit, J\clubsuit, J\spadesuit\}$ e $B = \{J\heartsuit, Q\heartsuit, K\heartsuit\}$

Esempio II

L'evento aleatorio di cui ci interessa calcolare la probabilità corrisponde all'insieme $E = A \vee B$ e quindi

$$p(A \vee B) = p(A) + p(B) = p(A \wedge B) =$$
$$\frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \wedge B|}{|\Omega|} = \frac{4}{40} + \frac{3}{40} - \frac{1}{40} = \frac{6}{40}.$$

Esempio

Sull'insieme $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ è definita una famiglia importantissima di distribuzioni di probabilità. Queste distribuzioni dipendono dai parametri n (intero non negativo) e p, numero reale compreso tra 0 e 1. La **distribuzione binomiale di parametri n e b** è definita dalla seguente tabella

0	1	...	k	...	n
$\binom{n}{0}p^n(1-p)^0$	$\binom{n}{1}p^{n-1}(1-p)^1$	...	$\binom{n}{k}p^{n-k}(1-p)^k$	...	$\binom{n}{n}p^0(1-p)^n$

Per verificare che questa è effettivamente una distribuzione, basta osservare che per la formula dello sviluppo della potenza di un binomio,

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_n = (p + (1-p))^n = 1.$$

Per avere un esempio di distribuzione di probabilità sull'insieme dei numeri naturali, dove non è evidentemente possibile definire la distribuzione uniforme, pasta porre $p_i = \frac{1}{2^i}$.

Operazioni logiche e operazioni insiemistiche

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme Ω è dotato di una struttura algebrica e di una struttura di ordine in cui sono definite le seguenti **operazioni** e **relazioni**

- **Unione** $A \cup B = \{x \ t.c. \ x \in A \ o \ x \in B\}$
- **Intersezione** $A \cap B = \{x \ t.c. \ x \in A \ e \ x \in B\}$
- **Complemento** $A^c = \{x \ t.c. \ x \notin A\}$
- **Ordinamento** $A \subseteq B$ se e solo se $x \in A$ implica $x \in B$

Nell'interpretazione assiomatica il **prodotto logico** di due eventi, cioè l'evento $A \ e \ B$ viene modellato come l'**intersezione** dei corrispondenti sottoinsiemi dello spazio campionario. La **somma logica** di due eventi, cioè l'evento $A \ o \ B$ viene modellato come l'**unione** dei corrispondenti sottoinsiemi dello spazio campionario. La **negazione** di un evento A viene modellata come il **complemento** del corrispondente sottoinsieme dello spazio campionario.

Proprietà delle operazioni insiemistiche

1. $A \cup \emptyset = A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cup A = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cap A = A$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $(A^c)^c = A$, $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \emptyset$
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup A^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
6. $A \subset B$ e $B \subset C$ implica $A \subset C$. $A \subset B$ e $B \subset A$ implica $A = B$
7. $\emptyset \subset A$ e $A \subset \Omega$ per ogni A e
8. $A \subseteq B$ se e solo se $A \cup B = B$ se e solo se $A \cap B = A$

Conseguenze immediate degli assiomi I

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$, infatti il complementare di un evento è un evento e $\emptyset$ è il complementare di Ω che è un elemento di $\mathcal{F}$ per ipotesi.
2. $P(\emptyset) = 0$. Infatti ogni evento è incompatibile con l'insieme vuoto perché $A \cap \emptyset = \emptyset$, quindi, per la legge di addizione di eventi incompatibili $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$, da cui la tesi
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$. Infatti A e A^c sono incompatibili e quindi, piché $A \cup A^c = \Omega$, $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$, da cui la tesi.
4. Se A, $B \in \mathcal{F}$, allora $A \cap B \in \mathcal{F}$ infatti $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ mostra com e$A \cap B$ si costruisce a partire da una successione di operazioni applicate ad A e B che non fanno uscire da $\mathcal{F}$.

Conseguenze immediate degli assiomi II

5. Se $A \subseteq B \in \mathcal{P}$ allora $P(A) \leq P(B)$. Infatti, $B = A \cup (A^c \cap B)$, ed essendo A e $A^c \cap B$ eventi incompatibili, $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \leq P(A)$ perchè la probabilità assume valori non negativi.

Regola completa per l'addizione

Abbiamo posto come assioma la regola dell'addizione per eventi incompatibili. Vogliamo generalizzare tale regola al caso di una coppia di eventi qualsiasi A e B. L'idea è quella di scrivere $A \cup B$ come unione di eventi disgiunti e applicare la regola di addizione per eventi incompatibili.
È un semplice esercizio di teoria elementare degli insiemi dimostrare che

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$

e che i tre eventi sono **incompatibili**. Allora, per la formula di additività per eventi incompatibili

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(B \cap A^c)$$

che possiamo riscrivere

$$P(A \cup B) = (P(A \cap B^c) + P(A \cap B)) + (P(B \cap A^c) + P(A \cap B)) - P(A \cap B)$$

e quindi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Esempio

Supponiamo che una moneta non truccata sia lanciata due volte. Sia A l'evento "esce testa al primo lancio" e sia B l'evento **"esce croce al secondo lancio"**. Lo spazio dei campioni è

$$\Omega = \{TT, CT, TC, CC\}$$

Assumiamo che ogni esito in Ω sia ugualmente probabile e abbia quindi probabilità $\frac{1}{4}$. $C = A \cup B$ è l'evento "esce testa al primo o al secondo lancio". Chiaramente $P(C) \neq P(A) + P(B) = 1$. Infatti, essendo $A \cap B$ l'evento "esce testa al primo e al secondo lancio", si ha

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.5 - 0.25 = 0.75$$

Probabilità e combinatoria I

Nello studio di semplici giochi aleatori, di procedure di campionamento, di problemi di ordinamento e di raggruppamento si tratta solitamente con spazi campionari finiti con **probabilità uniforme**, dove la probabilità $p(A)$ di un evento A è semplicemente

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Ci si riduce quindi, in questi casi, al problema di **contare gli elementi di un insieme**. Rivestono particolare importanza alcune regole standard di conteggio che richiameremo e applicheremo nelle slide successive:

Probabilità e combinatoria II

- Numero delle coppie, terne, .. n-ple ordinate che si possono formare estraendo gli elementi da due, tre,..., n insiemi non necessarriamente distinti. In particolare numero $D'_{n,k} = n^k$ delle k-ple ordinate che si possono estrarre da un insieme di n elementi, dette anche **disposizioni con ripetizione di k oggetti scelti da n.**
- Numero $D_{n,k} = (n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ delle k-ple ordinate **di elementi distinti** che si possono estrarre da un insieme di n elementi, dette anche **disposizioni senza ripetizione di k oggetti scelti da n.** In particolare, il numero $D_{n,n}$ conta il numero dei diversi ordinamenti che possiamo considerare su n oggetti distinguibili o **permutazioni** di n oggetti. Tale numero coincide con il fattoriale, precisamente, $D_{n,n} = n!$.

Probabilità e combinatoria III

- Numero

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{D_{k,k}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

dei sottoinsiemi di k elementi che posso estrarre da un insieme di n elementi, dette anche **combinazioni (senza ripetizione) di k oggetti scelti da n**.

Prodotto di due spazi campionari I

Definizione

Il **prodotto cartesiano** di due insiemi Ω_1 e Ω_2 è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in \Omega_1$ e $b \in \Omega_2$, e si indica con il simbolo $\Omega_1 \times \Omega_2$. Ovviamente, il prodotto cartesiano di due insiemi finiti è finito e

$$|\Omega_1 \times \Omega_2| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2|$$

Principio di moltiplicazione Se un esperimento ammette uno spazio campionario finito Ω_1 costituito da m possibili eventi elementari e un altro esperimento ammette uno spazio campionario finito Ω_2 costituito da n possibili eventi elementari, allora lo spazio campionario dell'**esperimento prodotto** che ammette come eventi elementari possibili le coppie ordinate

Prodotto di due spazi campionari II

(a_i, b_j) costituite da: un esito a_i del primo esperimento e un esito b_j del secondo, ammette come spazio campionario il prodotto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ e ammette quindi mn possibili eventi elementari.

Esempi

Esempio

Le carte di un mazzo francese (52 carte) hanno 13 possibili valori e 4 possibili semi. Ci sono quindi 13×4 possibili combinazioni *(valore,seme)*

Esempio

Una classe è fatta da 12 ragazzi e 18 ragazze. Il maestro sceglie un ragazzo e una ragazza come rappresentanti di classe. Può fare questa scelta in $12 \times 18 = 216$ modi diversi.

Probabilità prodotto I

Se $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), p_1$ e $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), p_2$, sono due spazi di probabilità finiti possiamo considerare sul prodotto degli spazi campionari la **probabilità prodotto** $p_1 \dots p_2$ definita dalla distribuzione $p_1 \times p_2(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\Omega_2)$. Si ottiene in questo modo lo **spazio prodotto**

$$\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_1 \times \otimes_2), p_1 \times p_2.$$

Si noti però che sul prodotto degli spazi campionari si possono considerare anche altre probabilità che estendono le probabilità assegnate, e non coincidono con la probabilità prodotto. La scelta di una di queste corrisponde a precise ipotesi sulla dipendenza tra i risultati del primo esperimento e i risultati del secondo esperimento. La scelta della **probabilità prodotto**

Probabilità prodotto II

equivale ad ipotizzare che **i risultati del primo esperimento non hanno influenza sui risultati del secondo esperimento**.
Per esempio, supponiamo che il primo esperimento consista nel rilevare l'esito di un colpo sparato da un certo tiratore e il secondo esperimento consista nel rilevare l'esito di un colpo sparato da un altro tiratore. L'esperimento combinato consiste nel rilevare entrambi gli esiti.
Se i tiratori sparano contemporaneamente, da postazioni separate, è ragionevole assumere che l'esito del primo tiro non abbia influenza sull'esito del secondo. Se però il secondo tiratore spara dopo aver conosciuto l'esito del colpo sparato dal primo tiratore, l'esito del primo tiro può influenzare la concentrazione del secondo tiratore e modificare quindi le probabilità degli esiti possibili per il secondo tiro. In questa situazione la probabilità prodotto non sarebbe più adeguata.

Prodotto di un numero finito di spazi campionari I

Definizione

Il **prodotto cartesiano** di k insiemi $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ è l'insieme delle k-ple ordinate $(a_1, b_1, \ldots, x_k)$ con $a_1 \in \Omega_1, a_2 \in \Omega_2, \ldots, a_k \in \Omega_k$, e si indica con il simbolo $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k$. Ovviamente, il prodotto cartesiano di k insiemi finiti è finito e

$$|\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k| = |\Omega_1| \cdots |\Omega_k|$$

Principio di moltiplicazione esteso Se k esperimenti ammettono ciascuno uno spazio campionario finito Ω_i costituito da n_i possibili eventi elementari, allora lo spazio campionario dell'**esperimento prodotto**, che ammette come eventi elementari possibili le k-ple ordinate $(a_1, b_1, \ldots, x_k)$, ammette

Prodotto di un numero finito di spazi campionari II

come spazio campionario il prodotto cartesiano $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k$ e ammette quindi $n_1 \cdots n_k$ possibili eventi elementari.

[

allowframebreaks]Esempio Una parola binaria di 8 bit è una successione di 8 cifre, ognuna delle quali può essere 0 o 1.
Quante diverse parole da 8 bit si possono avere?
Ci sono due scelte per il primo bit, due per il secondo, ecc. e così ci sono

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^8 = 256$$

parole siffatte

Esempio

Esempio

Una molecola di DNA è una successione di quattro nucleotidi diversi, denotati A, B, G, T (A sta per Adenina, C sta per Citosina, G sta per Guanina, T sta per Timina). La molecola può essere costituita da milioni di unità e può quindi contenere una quantità enorme di informazione. Per esempio, per una molecola con un milione di unità ci sono 4^{10^6} diverse possibili successioni. Questo è un numero straordinariamente grande, con circa un milione di cifre.

Un amminoacido è codificato da una successione di tre nucleotidi. Esistono $4^3 = 64$ codici diversi ma esistono solo 20 amminoacidi, perché alcuni di essi possono venire codificati in modi diversi. La molecola di una proteina è composta da centinaia di amminoacidi e quindi esiste un numero potenzialmente enorme di proteine. Per esempio esistono 20^{100}

Numeri grandi

Può essere utile avere un'idea intuitiva della grandezza di un numero con un milione di cifre, del tipo di quelli che abbiamo considerato nella slide precedente;
pensiamo di scrivere un numero siffatto su un quaderno a quadretti, utilizzando un quadretto per ogni cifra. In una pagina sono contenuti circa $30 \times 50 = 1500$ quadretti e quindi sono necessarie più di 600 pagine per scrivere un milione di cifre. Siccome ogni quaderno contiene un centinaio di pagine, sono necessari almeno 6 quaderni a quadretti solo per scrivere il numero.

Richiami sulle disposizioni e sulle permutazioni I

Supponiamo di poter scegliere r elementi da un insieme finito di n elementi e di volerli disporli in una lista ordinata di k elementi. In quanti modi lo possiamo fare? Dipende se ci è permesso duplicare gli elementi della lista.

Se non sono permesse duplicazioni, stiamo **campionando senza ripetizioni**. Allora k deve ovviamente essere minore e uguale a n e il numero richiesto è $D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ in quanto sono possibili **n scelte per il primo**, **(n-1) scelte per il secondo**, **(n-2) scelte per il terzo**,...,**(n-k+1) scelte per il** k**-esimo**.

Se sono permesse duplicazioni stiamo **campionando con ripetizioni**. Il numero richiesto è $D'_{n,k} = n^k$ in quanto sono possibili **n scelte per il primo**, **n scelte per il secondo**, **n scelte per il terzo**,...,**n scelte per il** k**-esimo**.

Il problema è equivalente a quello di estrarre **palline marcate** da un'urna. Nel primo tipo di estrazione non è permesso rimettere la

Richiami sulle disposizioni e sulle permutazioni II

pallina nell'urna prima della successiva estrazione e si ha una **estrazione senza reimbussolamento**.
Nel secondo tipo, dopo aver segnato la marca sulla pallina, è permesso rimettere la pallina nell'urna prima della successiva estrazione e si ha una **estrazione con reimbussolamento**.

Esempi I

Esempio

In quanti modi si possono mettere in fila 5 bambini?
Questo numero coincide con
$D_{5,5} = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

Esempio

Supponiamo di voler scegliere 5 bambini da una classe di dieci e di metterli in fila? In quanti modi è possibile?
Questo numero coincide con
$D_{10,5} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30,240.$

Esempi II

Esempio

In alcuni stati le targhe automobilistiche hanno sei caratteri: tre lettere seguite da tre cifre. Quante targhe distinte sono possibili?
Ci sono $D'_{26,3} = 26^3 = 17,576$ modi di scegliere le lettere e $D'_{10,3} = 10^3 = 1,000$ modi di scegliere le cifre. Per il principio di moltiplicazione, il numero delle targhe distinte è $17,576 \times 1,000 = 17,576,000$.

Esempi I

Esempi II

Esempio

Continuando l'esempio delle targhe, se tutte le successioni di 6 caratteri sono ugualmente probabili, qual è la probabilità che la targa di una nuova macchina non contenga nè lettere nè cifre duplicate?
Chiamiamo A l'evento desiderato; lo spazio degli eventi Ω consiste di tutte le $17,576,000$ targhe possibili. Essendo tutte queste ugualmente probabili, la probabilità di A è il rapporto tra il numero di modi in cui A può presentarsi diviso il numero totale di tutti gli esiti possibili. Ci sono $D_{26,3} = 15,600$ successioni di lettere senza ripetizione e ci sono $D_{10,3} = 720$ successioni di cifre senza ripetizione. Per il principio di moltiplicazione, ci sono $15,600 \times 720 = 11,232,000$ successioni senza ripetizione. La probabilità di A è quindi

$$p(A) = \frac{11,232,000}{} = 0.64$$

Il problema del compleanno I

Supponiamo che una stanza contenga n persone. Qual è la probabilità che almeno due di queste persone compia gli anni nello stesso giorno?
Assumiamo che ogni giorno dell'anno sia ugualmente probabile come giorno per il compleanno, trascuriamo gli anni bisestili, e denotiamo con A l'evento "ci sono almeno due persone con un compleanno comune". Come succede spesso è più facile calcolare $p(A^c)$ invece di $p(A)$. Questo perché A può manifestarsi in molti modi, mentre A^c è molto più semplice.
Associando ad ogni persona la data del suo compleanno ci sono $D'_{365,n} = 365^n$ esiti possibili, mentre A^c si può manifestare in $D_{365,n} = 365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)$ modi. Quindi

$$p(A^c) = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

Il problema del compleanno II

e

$$p(A) = 1 - p(A^c) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

Il problema del compleanno (II)

La seguente tabella esibisce il valore di $p(A)$ per diversi valori di n:

n	p(A)
4	0.016
16	0.284
23	0.507
32	0.753
40	0.891
56	0.988

Dalla tabella segue che se ci sono solo 23 persone, la probabilità che almeno due di loro compiano gli anni lo stesso giorno supera il 50%.

Variazioni sul problema del compleanno

A quante persone bisogna chiedere perché si abbia il 50% di probabilità di trovare qualcuno che compia gli anni lo stesso giorno in cui li compio io?
Supponiamo che il lettore chieda ad n persone; A denoti l'evento "il giorno del compleanno di almeno una delle persone a cui si è chiesto è lo stesso del mio". Ancora, è più facile lavorare con A^c. Il numero totale degli esiti possibili è $D'_{365,n} = 365^n$ e il numero totale degli esiti in A^c è 364^n. Così

$$p(A^c) = \frac{364^n}{365^n}$$

e

$$p(A) = 1 - \frac{364^n}{365^n}$$

Perché questa probabilità sia di circa il 50%, n deve essere 253.

Richiami sulle combinazioni I

Spostiamo la nostra attenzione da **contare disposizioni** a **contare combinazioni**. Ora non siamo più interessati all'ordine degli allineamenti, ma solo ai costituenti, senza riguardo all'ordine in cui essi si presentano. In particolare ci poniamo la seguente domanda: scegliendo r oggetti tra n oggetti dati,senza ripetizioni e senza prestare attenzione all'ordine, quante diverse scelte sono possibili? Abbiamo già risposto a questa domanda quando abbiamo contato il numero dei sottoinsiemi di un insieme finito. Questo è il numero delle **combinazioni di** r **oggetti scelti da** n, e lo indichiamo con il simbolo $C_{n,r}$. È chiaro che $D_{n,r} = D_{r,r} \times C_{n,r}$ e quindi

$$C_{n,r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Richiami sulle combinazioni II

Questo numero, estremamente importante, si denota anche con il simbolo $\binom{n}{r}$ e conta il **numero delle combinazioni di** r **oggetti scelti da** n o equivalentemente, il numero dei sottoinsiemi di un insieme con n elementi. I numeri $\binom{n}{k}$ sono anche detti **coefficienti binomiali**

Esempi I

Esempi II

Esempio

Fino al 1991, un giocatore della lotteria di stato della California potevava vincere indovinando 6 numeri compresi tra 1 e 49 che venivano estratti a caso. Ci sono $\binom{49}{6} = 13,983,816$ modi per scegliere 6 numeri tra 49 e quindi la probabilità di vittoria era di circa 1 su 14 milioni. Se non c'erano vincitori, il montepremi andava ad aggiungersi a quello dell'estrazione successiva. Nel 1991 le regole vennero modificate in modo tale che i vincitori dovessero selezionare correttamente 6 numeri compresi tra 1 e 53. Siccome $\binom{53}{6} = 22,957,480$, la probabilità di vincere si abbassò a circa 1 su $23,000,000$. Il montepremi si accumulò fino a raggiungere la cifra record di 120 milioni di dollari. Questo produsse una febbre per il gioco che portò la gente ad acquistare biglietti ad un ritmo compreso tra uno e due milioni all'ora, con gran vantaggio per le casse dello stato.

Esempi I

Esempio Nella pratica dei controlli di qualità, solo una frazione della produzione di un processo manifatturiero viene campionato ed esaminato, siccome sarebbe troppo dispendioso in termini di tempo e denaro esaminare ogni manufatto e anche perché i test di controllo possono talvolta essere distruttivi. Supponiamo che ci siano n prodotti in un lotto, e tra questi ne vengano estratti un campione costituito da r elementi. Ci sono $\binom{n}{r}$ campioni siffatti. Ora, supponiamo che il lotto contenga k prodotti difettosi. Qual è la probabilità che uno di questi campioni contenga esattamente m prodotti difettosi? Chiaramente questa domanda è rilevante al fine di valutare l'efficacia dello schema di campionamento e l'ampiezza più conveniente del campione può essere calcolata valutando queste probabilità per diversi valori di k. Chiamiamo A l'evento in

Esempi II

questione. La probabilità di A è il numero dei modi in cui A può presentarsi diviso il numero totale dei possibili esiti. Per trovare il numero di modi in cui A può presentarsi, utilizziamo il principio di moltiplicazione. Ci sono $\binom{k}{m}$ modi di scegliere m prodotti difettosi nel campione a partire dai k difettosi nel lotto, e ci sono $\binom{n-k}{r-m}$ modi di scegliere gli $r-m$ prodotti non difettosi nel campione dagli $n-k$ prodotti non difettosi nl lotto. Perciò, A può presentarsi in $\binom{k}{m}\binom{n-k}{r-m}$ modi. Essendo $p(A)$ il rapporto tra il numero di modi in cui A può manifestrasi diviso per il numero totale degli esiti possibili, si ha

$$p(A) = \frac{\binom{k}{m}\binom{n-k}{r-m}}{\binom{n}{r}}$$

Metodo della cattura e ricattura I

Il cosiddetto metodo della cattura e ricattura è utilizzato talvolta per stimare l'ampiezza di una popolazione di animali selvatici. Supponiamo che 10 animali siano catturati, marcati e liberati. In una successiva occasione, vengono catturati 20 animali, e si rileva che 4 di loro sono marcati. Quanto è grande la popolazione?
Assumiamo che ci siano n animali nella popolazione, di cui 10 sono marcati. Se i 20 animali catturati successivamente sono scelti in modo tale che tutti gli $\binom{n}{20}$ gruppi siano tutti equiprobabili, (questa è una assunzione molto restrittiva), la probabilità che 4 di loro siano marcati è

$$\frac{\binom{10}{4}\binom{n-10}{20-4}}{\binom{n}{20}}$$

Metodo della cattura e ricattura II

Evidentemente n non è determinato in modo esatto dalle informazioni disponibili, ma può essere **stimato**. Un metodo per la stima, detto **metodo della massima verosimiglianza** consiste nello scegliere il valore di n che rende maggiormente probabile l'esito osservato.

Per trovare la stima di massima verosimiglianza, supponiamo in generale, che t animali siano marcati. Quindi, di un secondo campione di ampiezza m, vengono ricatturati r animali marcati. Stimiamo n come il massimizzatore della verosimiglianza

$$L_n = \frac{\binom{t}{r}\binom{n-t}{m-r}}{\binom{n}{m}}$$

Metodo della cattura e ricattura I

Per determinare il valore di n che massimizza L_n, si consideri il quoziente dei termini successivi, che vale

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} = \frac{(n-t)(n-m)}{n(n-t-m+r)}$$

Questo rapporto è maggiore di 1, cioè L_n è crescente, se

$$\begin{aligned}
(n-t)(n-m) &> n(n-t-m+r) \\
n^2 - nm - nt + mt &> n^2 - nt - nm - nr \\
mt &> nr \\
\frac{mt}{r} &> n
\end{aligned}$$

Così L_n cresce per $n < mt/r$ e decresce per $n > mt/r$; quindi il valore di n che massimizza L_n è il più grande intero che non supera mt/r. Applicando questo risultato ai dati ottenuti precedentemente, vediamo che la stima di massima verosimiglianza per n è $mt/r = (20 \cdot 10)/4 = 50$. Questa stima è intuitiva in quanto coincide con il numero che uguaglia la proporzione degli animali marcati rispetto agli animali del secondo campione con la proporzione degli animali marcati rispetto al totale. ma il metodo di massima verosimiglianza costituisce un **metodo generale per la stima dei parametri di un modello probabilistico**.

Raggruppamenti in r classi I

Proposizione

Il numero di modi in cui n oggetti possono essere raggruppati in r classi con n_i elementi nella i-esima classe ($i = 1 \ldots, r$ e $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$) è

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

Dimostrazione Questo si dimostra usando il conteggio delle combinazioni e il principio di moltiplicazione. Si noti che il conteggio delle combinazioni si ottiene come caso speciale della proposizione generale per $r = 2$. Ci sono $\binom{n}{n_1}$ modi per scegliere gli oggetti nella prima classe. Fatto questo, ci sono $\binom{n-n_1}{n_2}$ modi

Raggruppamenti in r classi II

per scegliere gli oggetti nella seconda classe. Continuando in questa maniera, ci sono, complessivamente

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!n_r!}$$

scelte possibili. Dopo le opportune semplificazioni abbiamo il risultato.

Esempi I

Esempio

Un comitato di sette membri deve essere diviso in tre sottocomitati di tre, due e due membri. Questo può essere fatto in

$$\binom{7}{3\ 2\ 2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

modi.

Esempi II

Esempio

In quanti modi è possibile disporre l'insieme dei nucleotidi

$$\{A, A, G, G, G, G, C, C, C\}$$

in una successione di 9 lettere?
È possibile applicare la proposizione sui raggruppamenti in r classi, dopo aver compreso che il problema può essere riformulato come problema di trovare il numero dei modi in cui le nove posizioni nella successione possono essere divise in sottoinsiemi di due, quattro e tre (le posizioni delle lettere A, G e C rispettivamente). Questo numero vale:

$$\binom{9}{2\ 4\ 3} = \frac{9!}{2!4!3!} = 1260$$

Esempi I

Esempio

In quanti modi $n = 2m$ giocatori possono essere accoppiati e destinati a m campi di gioco per il primo round di un torneo di tennis?
In questo problema, $n_i = 2$, $i = 1, \dots, m$, e per la proposizione C ci sono

$$\frac{(2m)!}{2^m}$$

assegnazioni distinte.

Bisogna prestare attenzione ai problemi come quello appena discusso. Supponiamo che il problema sia quello di detreminare in quanti modi $n = 2m$ giocatori possono essere accoppiati per formare il primo round di un torneo di tennis, senza che alle

Esempi II

coppie venga assegnato un campo di gioco. Allora il precedente risultato deve essere diviso per $m!$, e il numero delle coppie è

$$\frac{(2m)!}{m!2^m}$$

I numeri $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_r}$ sono chiamati **coefficienti multinomiali** e appaiono nell'espansione

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

dove la somma è estesa a tutti gli interi non negativi $n_1, n_2, \dots, n_r$ tali che $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

La probabilità di un evento vari al variare delle informazioni I

La probabilità di un evento dipende dalle informazioni che abbiamo sull'evento stesso. Vogliamo indagare come varia la probabilità di un evento variando le nostre informazioni. Partiamo con un esempio. Supponiamo di avere due manufatti identici ma prodotti in due fabbriche diverse. La prima fabbrica fornisce il 70% dei manufatti mentre la seconda ne fornisce il 30%. La prima fabbrica garantisce una durata standard all'83% dei manufatti e la seconda al 63%. Scegliendo a caso un manufatto senza conoscerne la provenienza, la probabilità che abbia una durata standard è del 77%. Infatti, in media, su cento manufatti scelti a caso: 70 provengono dalla prima fabbrica e di questi in media l'83%, cioè 58 hanno una durata standard; 30 provengono dalla prima fabbrica e di questi in media il 63%, cioè 19 hanno una durata standard. Quindi, in media, su 100 manufatti scelti a caso, $58 + 19 = 77$ hanno durata standard. Se però sappiamo con certezza che manufatti provengono dalla prima

La probabilità di un evento vari al variare delle informazioni II

fabbrica, allora la probabilità che abbiano una durata standard sale all'83% e questo mostra come, in generale, aggiungendo nuove condizioni ad un esperimento, un'osservazione o una misura, le probabilità degli eventi si possono modificare.

Probabilità condizionata

Nell'esempio che abbiamo discusso abbiamo considerto due probabilità relative all'evento: **pescare un manufatto standard**. Quella **incondizionata**, del 77% e quella **condizionata** all'evento **il manufatto proviene proviene dalla prima fabbrica**, che è dell'83%. Indicando con A l'evento **manufatto standard** e con B l'evento **manufatto proveniente dalla prima fabbrica**, indichiamo con $P(A)$ la probabilità incondizionata e con $P(A|B)$ la probabilità condizionata al verificarsi dell'evento B.
Ogni probabilità è in effetti una probabilità condizionata, ma si suppone esista un set di eventi fissato, rispetto a cui la probabilità si dice incondizionata, e che quelle condizionate si ottengano aggiungendo nuove condizioni, a quelle fissate.

Legge di moltiplicazione delle probabilità

Siano A e B due eventi fissati. Sia l il numero medio di volte in cui si realizzano entrambi gli eventi A e B in n ripetizioni dello stesso esperimento e sia m il numero medio di volte in cui si realizza l'evento B. è chiaro che

$$\frac{l}{n} = \frac{l}{m}\frac{m}{n}$$

Secondo l'interpretazione frequentista della probabilità, questa uguaglianza si può riformulare nella maniera seguente:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

che prende il nome di **legge di moltiplicazione delle probabilità**.

Probabilità condzionata e teorema di Bayes

Siano A e B due eventi di Ω e sia $P(B) > 0$. La **probabilità di** A **condizionata a** B è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema di Bayes (Prima formulazione)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Dimostrazione Dalla definizione di $P(A|B)$ si ha che

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

e, dalla definizione di $P(B|A)$,

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

da cui la tesi.

Applicazioni del teorema di Bayes (I)

Si consideri una scuola che ha il 60% di studenti maschi e il 40% di studentesse femmine. Le studentesse indossano in egual numero gonne o pantaloni; gli studenti indossano tutti quanti i pantaloni. Un osservatore, da lontano, nota uno studente coi pantaloni. Qual è la probabilità che quello studente sia una femmina?

Il problema può essere risolto con il teorema di Bayes, ponendo l'evento A che lo studente osservato sia femmina, e l'evento B che lo studente osservato indossi i pantaloni. Per calcolare $P(A|B)$, dovremo sapere:

$P(A)$, ovvero la probabilità che lo studente sia femmina senza nessun'altra informazione. Per l'osservatore tutti gli studenti hanno la stessa probabilità di essere osservati, quindi, essendo le studentesse il 40% del totale, la probabilità che lo studente visto sia femmina risulterà $P(A) = 2/5$.

Applicazioni del teorema di Bayes (II)

$P(B|A)$, ovvero la probabilità che uno studente indossi i pantaloni, noto che lo studente è femmina. Poichú le femmine indossano gonne e pantaloni in egual numero, la probabilità sarà di 1/2.
$P(B)$, ovvero la probabilità che uno studente qualsiasi (maschio o femmina) indossi i pantaloni. Poichú il numero di coloro che indossa i pantaloni è di 80 (60 maschi + 20 femmine) su 100 studenti fra maschi e femmine, la probabilità $P(B)$ è di 80/100 = 4/5. Ciò detto, possiamo applicare il teorema:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{1/2 \times 2/5}{4/5} = \frac{1}{4}$$

Pertanto la probabilità che lo studente con i pantaloni sia femmina è 1/4, cioè 25%.

Teorema di Bayes, seconda forma

Siano A e B due eventi qualsiasi. Allora, B si può scrivere come unione di due eventi incompatibili nella forma seguente $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ e quindi

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c).$$

allora, per il teorema della moltiplicazione, $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$. Sostituendo questo risultato nella prima forma del teorema di Bayes abbiamo

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}.$$

Formula per la probabilità totale e terza forma del teorema di Bayes I

Sistema completo di eventi

Una famiglia $A_1, \ldots, A_n$ di eventi si dice **sistema completo di eventi** se: i) gli eventi sono a due a due incompatibili; ii) uno degli eventi si deve sempre realizzare.

Dato un sistema completo di eventi $A_1, \ldots, A_n$, possiamo decomporre un qualsiasi evento B nella somma logica di eventi incompatibili

$$B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

Per il teorema di Bayes, prima forma, abbiamo allora la **formula per la probabilità totale**

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)$$

da cui segue immediatamente

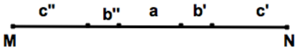
Formula per la probabilità totale e terza forma del teorema di Bayes II

Terza forma del teorema di Bayes

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}}$$

Esempio (I)

Supponiamo che un bersaglio sia posizionato su un segmento MN, suddiviso in 5 segmenti più piccoli, come in figura



Supponiamo che la posizione precisa del bersaglio **non sia nota**, ma si conoscano solo le probabilità che il bersaglio sia contenuto nei diversi segmenti:

$$P(a) = 0.48; \quad P(b') = P(b'') = 0.21; \quad P(c') = P(c'') = 0.05$$

Essendo più probabile che il bersaglio si trovi nel segmento a è evidente che verso quel segmento conviene sparare

Continua

Esempio (II)

A causa di inevitabili errori di mira, tirando verso a possiamo disuggere il bersaglio (evento K) anche quando non si trova nel segmento a. Supponiamo di conoscere le seguenti probabilità di colpire il bersaglio, tirando verso a, nelle ipotesi che il bersaglio si trovi in uno qualunque dei segmenti della suddivisione e

$$P(K|a) = 0.56 \quad P(K|b') = 0.18 \quad P(K|b'') = 0.16 \quad P(K|c') = 0.06 \quad P(K|c'') = 0.04$$

Supponiamo che aver sparato un colpo e di aver colpito il bersaglio. Ci domandiamo:
Come cambiano le probabilità di osservare il bersaglio nei diversi segmenti, p.e. $P(a|K)$? A questa domanda possiamo rispondere con la formula di Bayes.

Continua

Esempio (III)

Essendo gli eventi $a, b', \cdots, c''$ un **sistema completo**, abbiamo, per la terza forma della formula di Bayes che $P(a|K)$ è uguale a:

$$\frac{P(a)P(K|a)}{P(a)P(K|a) + P(b')P(K|b') + P(b'')P(K|b'') + P(c')P(K|c') + P(c'')P(K|c'')} =$$

$$\frac{0.48 \cdot 0.56}{0.48 \cdot 0.56 + 0.21 \cdot 0.18 + 0.21 \cdot 0.16 + 0.05 \cdot 0.06 + 0.05 \cdot 0.04} \sim 0.78$$

e analogamente

$P(b'\|K)$	$P(b''\|K)$	$P(c'\|K)$	$P(c''\|K)$
0.11	0.10	0.01	0.00

Si noti che nelle espressioni per il calcolo delle nuove probabilità di osservare il bersaglio nei diversi intervalli, il denominatore rimane sempre lo stesso e coincide con $P(K) = 0.35$.

Eventi indipendenti I

Dati due eventi $A, B \in \mathcal{F}(\Omega)$, con $P(B) > 0$ e $P(A) > 0$, se $P(A|B) = P(A)$ allora il verificarsi dell'evento A **non dipende** dal verificarsi dell'evento B.
In questo caso allora

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)} \tag{1}$$

che esprime anche la condizione, nelle ipotesi $P(B) > 0$ e $P(A) > 0$, che il verificarsi dell'evento B **non dipende** dal verificarsi dell'evento A
La condizione (1) ha senso anche quando $P(A)$ o $P(B)$ sono uguali a zero e probabilità condizionate non possono essere definite.

Eventi indipendenti II

Definizione

Due eventi A e B si dicono **indipendenti** quando vale la condizione (1).

Eventi complementari indipendenti I

Succede in molti casi interessanti, che due o più eventi pur non essendo incompatibili siano tali però che i loro complementari sono indipendenti. Questo permette di semplificare il calcolo di $P(A \cup B)$ nel seguente modo.
Siano A e B due eventi qualsiasi

$$P(A \cup B) = P\left(((A \cup B)^c)^c\right) = P\left((A^c \cap B^c)^c\right) = 1 - P(A^c \cap B^c)$$

se possiamo assumere che A^c e B^c sono indipendenti, allora

$$P(A \cup B) = 1 - P(A^c) \cdot P(B^c) = 1 - (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$$

Più in generale, se $A_1, \ldots, A_n$ sono eventi i cui complementari sono indipendenti

$$P\left(\bigcup_{i=1,\ldots,n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1,\ldots,n} (1 - P(A_i))$$

Eventi complementari indipendenti II

e ancora, se gli A_i sono **equiprobabili**, di probabilità p

$$P\left(\bigcup_{i=1,\ldots,n} A_i\right) = 1 - (1-p)^n$$

Probabilità di trasmissione del virus dell'HIV

Torniamo al calcolo della probabilità dell'evento E di contrarre il virus dell'HIV in 500 rapporti non protetti, per ognuno dei quali la probabilità di trasmissione del virus è pari a $\frac{1}{500}$. Indichiamo con A_i l'evento **il virus viene trasmesso durante l'i-esimo rapporto non protetto**. Allora $E = \bigcup_{1=1,\ldots,500} A_i$.
Abbiamo già osservato che gli eventi A_i non sono incompatibili in quanto il virus può essere scambiato in diversi rapporti e quindi non possiamo utilizzare la formula della somma per eventi incompatibili. È ragionevole assumere però che gli eventi complementari degli A_i, cioè gli eventi **il virus non viene trasmesso durante l'i-esimo rapporto non protetto**, siano **indipendenti** e quindi, possiamo utilizzare la formula della slide precedente e quindi

$$P(E) = 1 - \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{500} = 0.63.$$

Test diagnostici I

Un **test diagnostico** viene praticato per rivelare la presenza di una malattia. Alcuni test sono **dicotomici**, cioè danno risposta **positiva** o **negativa**, come per esempio il test per l'HIV. Altri danno risposte su scale continue (per esempio misurano la concentrazione di una certa sostanza) e possono essere dicotomizzati fissando delle soglie. In generale, ai fini dell'interpretazione del risultato di un test diagnostico bisogna considerare quattro popolazioni:

- Malati, che indicheremo con M^+.
- Sani, che indicheremo M^-.
- Positivi al test, che indicheremo T^+.
- Negativi al test, che indicheremo T^-.

Si introducono le seguenti quantità:

Test diagnostici II

- Specificità del test, $Sp = P(T^-|M^-)$.
- Sensibilità del test, $Se = P(T^+|M^+)$.
- Valore predittivo di un esito positivo $Vp^+ = P(M^+|T^+)$.
- Valore predittivo di un esito negativo $Vp^- = P(M^-|T^-)$.
- Prevalenza della malattia $Pr = P(M^+)$.

Test diagnostici (II)

Le quantità caratteritiche di un test diagnostico sono legate tra loro dal teorema di Bayes. Per esempio, essendo M^- e M^+ una partizione dell'intera popolazione

$$Vp^- = P(M^-|T^-) = \frac{P(T^-|M^-)P(M^-)}{P(T^-|M^-)P(M^-) + P(T^-|M^+)P(M^+)}$$

Osserviamo che $P(T^-|M^+) = 1 - P(T^+|M^+)$ e che $P(M^-) = 1 - P(M^+)$ e quindi

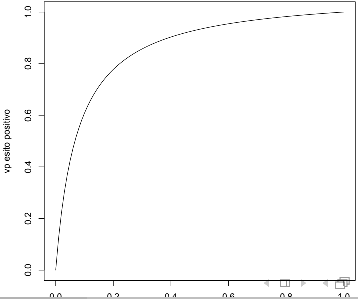
$$Vp^- = \frac{Sp(1 - Pr)}{Sp(1 - Pr) + (1 - Se)Pr}$$

e analogamente

$$Vp^+ = \frac{Se \cdot Pr}{Se \cdot Pr + (1 - Sp)(1 - Pr)}$$

Test diagnostici (III)

A parità di specificità e sensibilità, il valore predittivo di un esito positivo dipende dalla prevalenza della malattia. È massimo per prevalenze molto basse e diventa sempre più basso al crescere della prevalenza. Se, per esempio, la specificità è 0.95 e la sensibilità è 0.7, il valore predittivo è intorno al 50% quando la prevalenza della malattia è circa del 10%.



Il test della cartomante

Supponiamo che il test sia completamente scorrelato dalla malattia, per esempio che sia determinato dal lancio di una moneta truccata con probabilità p che esca testa, ovvero **test positivo**. Allora

$$Vp^- = P(M^-|T^-) = P(M^-) = 1 - Pr$$

e, analogamente $Vp^+ = P(M^+|T^+) = P(M^+) = Pr$.

$$Sp = P(T^-|M^-) = P(M^-|T^-)P(T^-)/P(M^-) = \\ P(M^-)P(T^-)/P(M^-) = P(T^-) = (1-p)$$

e, analogamente $Sp = P(T^+) = p$. Quindi nei test della cartomante, $Vp^- + Vp^+ = 1$ e $Sp^- + Sp^+ = 1$. Si noti che se la prevalenza di una malattia è molto bassa, il test della cartomante ha un valore predittivo di un esito negativo molto alto semplicemente perchè è improbabile che una persona sia malata.

Il test perfetto

Il test perfetto è quello che **non commette errori** e quindi

$$Se = 1 \qquad Sp = 1$$

e

$$Vp^{-} = 1 \qquad Vp^{+} = 1.$$

Si noti che nel test perfetto, $Vp^{-} + Vp^{+} = 2$ e $Sp^{-} + Sp^{+} = 2$.

Trasmissione dei caratteri ereditari I

La **legge di Hardy Weinberg** riguarda la trasmissione dei **caratteri ereditari**. I caratteri ereditari sono codificati nel **genoma**, suddiviso in **cromosomi** che contengono a loro volta i **geni**, le unità ereditaria fondamentali degli organismi viventi. I geni sono a loro volta formati da sequenze ben determinate di quattro basi azotate (**Adenina**, **Timina**, **Citosina**, **Guanina**).
I **caratteri fenotipici** di un individuo (colore degli occhi, conformazione del naso, capelli lisci o ricci, ecc.) sono singolarmente determinati da un singolo gene o da un poole di geni, che possono avere più varianti, dette **alleli**.
In un **organismo diploide** ogni gene è costituito da due alleli, ognuno dei quali può presentarsi in diverse forme. Per semplificare l'esposizione, assumiamo che gli alleli di un determinato gene **G** si presentino in due forme che indicheremo

Trasmissione dei caratteri ereditari II

A_0 e A_1 rispettivamente. Quindi i geni si presentano in tre **genotipi**

$$A_0 A_0, \qquad A_0 A_1 \qquad A_1 A_1.$$

Si noti che il genotipo $A_0 A_1$ non è distinguibile dal genotipo $A_1 A_0$.

Genotipo e fenotipo

Assumiamo che il **fenotipo** associato al gene **G** si possa presentare in due forme (per esempio: buccia liscia o buccia rugosa di un certo legume), che indicheremo F_0 e F_1 rispettivamente. L'associazione tra genotipo e fenotipo è

$$\begin{array}{ccc} A_0A_0 & A_0A_1 & A_1A_1 \\ F_0 & F_0 & F_1 \end{array}$$

Si noti quindi che nella determinazione del fenotipo l'allele A è **dominante** in quando il genotipo **eterozigote** A_0A_1 è uguale a quello **omozigote** A_0A_0.

Trasmissione dei caratteri I

Supponiamo di avere una popolazione in cui la frequenza dei diversi genotipi sia

$$p_{00} \qquad p_{01} \qquad p_{11}$$

rispettivamente. Assumiamo che la popolazione sia sufficientemente grande da poter identificare le frequenze relative con le probabilità di osservazione. La frequenza relativa dei diversi alleli è allora

$$p_0 = p_{00} + \frac{1}{2}p_{01} \qquad p_1 = \frac{1}{2}p_{01} + p_{11}.$$

Vogliamo studiare come si distribuiscono i genotipi e gli alleli nella generazione successiva. Oltre ad assumere che la popolazione sia molto grande, assumiamo che: non avvengano

Trasmissione dei caratteri II

mutazioni; non ci sia selezione naturale; gli accoppiamenti siano del tutto casuali; gli individui siano tutti fertili allo stesso modo; non ci siano immigrazioni nè emigrazioni. Consideriamo inoltre che valgano le **leggi di Mendel**: di disgiunzione e di indipendenza (cfr. Villani - Gentili, p. 208). Come conseguenza di queste ipotesi, nella generazione successiva abbiamo:

$$p_{00} = p_0^2 \qquad p_0 1 = 2 p_0 p_1 \qquad p_{11} = p_1^2$$

La distribuzione degli alleli nella nuova generazione è allora

$$\overline{p}_0 = p_{00} + \frac{1}{2} p_{01} = p_0^2 + p_0 p_1 = p_0(p_0 + p_1) = p_0$$

e analogamente

$$\overline{p}_1 = \frac{1}{2} p_{01} + p_{11} = p_0 p_1 + p_1^2 = p_1$$

Legge di Hardy-Weinberg

Da quanto visto, segue che, nelle ipotesi fatte, la distribuzione degli alleli non varia e la distribuzione delle frequenze geneche si stabilizza alla prima iterazione del ciclo riproduttivo, rimanendo poi sempre la stessa.
La distribuzione di equilibrio si dice di **Hardy-Weinberg**. La distribuzione di equilibrio è una distribuzione teorica. Una qualunque violazione delle ipotesi può portare facilmente a distribuzioni limite di carattere essenzialmente diverso (cfr. Benedetto, Degli Esposti, Maffei).